هذا الملف تم تحميله من موقع : Talamid.ma

ملخصي وقواعدي في الرياضيات لمستوى الأولى باك علوم تجريبية

من انجاز : الأستاذ نجيب عثماني أستاذ مادة الرياضيات في الثانوي تأهيلي

ملخص درس المتجهات في الفضاء

I. تساوي متجهتين

1)عناصر متجهة: A و B نقطتان من الفضاء , إذا رمزنا للمتجهة $\overrightarrow{AB}$ بالرمز $\vec{u}$ فان :

- اتجاه $\vec{u}$ هو المستقيم (AB) .
- منحى هو المنحى من A نحو B
- منظم $\vec{u}$ هي المسافة AB و نكتب : $\|\vec{u}\| = AB$

2)ملحوظة: لكل نقطة A من الفضاء , المتجهة $\overrightarrow{AA}$ ليس لها اتجاه و منظمها منعدم ؛ $\overrightarrow{AA}$ تسمى المتجهة المنعدمة , ونكتب $\overrightarrow{AA} = \vec{0}$

لكل متجهة $\vec{u}$ من الفضاء , لكل نقطة A من الفضاء , توجد نقطة وحيدة M من الفضاء بحيث : $\vec{u} = \overrightarrow{AM}$

3)تعريف: نقول إن متجهتين متساويتان , اذا كان لهما نفس الاتجاه ونفس المنحى ونفس المنظم.

4)خاصية: ليكن $ABCD$ رباعيا من الفضاء لدينا :

$ABCD$ متوازي الأضلاع اذا وفقط اذا كان $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.

مثال: لتكن A و B و C و D أربع نقط غير مستقيمية بين أنه اذا كان : $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD}$ لكل M من الفضاء فان : $ABCD$ متوازي الأضلاع.

الجواب :يكفي أن نبين مثلا أن : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ ؟؟؟؟

لدينا : $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{CD}$ يعني $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MD}$ يعني $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ يعني $\vec{0} = \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}$

II. مجموع متجهتين

1)تعريف: لتكن $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متجهتين من الفضاء

مجموع المتجهتين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ هي المتجهة $\vec{w}$ بحيث : اذا وضعنا $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ و $\vec{v} = \overrightarrow{BC}$ فان : $\vec{w} = \overrightarrow{AC}$ و نكتب : $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$

2)علاقة شال: لكل A و B و C نقط من الفضاء

لدينا: $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$

3)مقابل متجهة: لتكن $\vec{u}$ متجهة من الفضاء ,مقابل المتجهة $\vec{u}$ هي المتجهة التي نرمز لها بالرمز $-\vec{u}$ و التي لها نفس اتجاه $\vec{u}$ ونفس منظم $\vec{u}$ و ولكن منحاها هو عكس منحى $\vec{u}$ ولدينا $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$ لكل A و B من الفضاء .

لتكن A و B و C و D أربع نقط من الفضاء

مثال: نضع : $\vec{u} = 3\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MC} + 4\overrightarrow{MB} - 5\overrightarrow{MD}$ لكل M من الفضاء بين أن : المتجهة $\vec{u}$ غير مرتبطة بالنقطة M

الجواب : 1. $\vec{u} = 3\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{AC} + 4\overrightarrow{MA} + 4\overrightarrow{AB} - 5\overrightarrow{MA} - 5\overrightarrow{AD}$

2. ومنه المتجهة $\vec{u}$ غير مرتبطة بالنقطة M $\vec{u} = -2\overrightarrow{AC} + 4\overrightarrow{AB} - 5\overrightarrow{AD}$

III. استقامية متجهتين و التعريف المتجهي لمستقيم ومستوى

3.

تعريف : لتكن $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متجهتين غير منعدمتين من الفضاء

نقول ان $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مستقيميتان اذا وجد عدد حقيقي k بحيث : $\vec{v} = k\vec{u}$

خاصية :: لتكن A و B و C و D نقط من الفضاء بحيث $A \neq B$ و $C \neq D$

$(AB) \parallel (CD) \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R}; \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}$

مثال: ليكن $ABCD$ رباعي الأوجه

نعتبر النقط M و N و P و Q أربع نقط بحيث :

$\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AN} = 2\overrightarrow{AD}$ و $\overrightarrow{CQ} = 3\overrightarrow{CB}$ و $\overrightarrow{CP} = 3\overrightarrow{CD}$

1. أكتب كلا من المتجهتين $\overrightarrow{MN}$ و $\overrightarrow{PQ}$ بدلالة $\overrightarrow{BD}$

2. استنتج أن المتجهتين $\overrightarrow{MN}$ و $\overrightarrow{PQ}$ مستقيميتان .

3. ماذا تستنتج بالنسبة للمستقيمين (MN) و (PQ) ؟

أجوبة : 1) $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AN} = -\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN} = -2\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AD}$

$\overrightarrow{MN} = 2\overrightarrow{BA} + 2\overrightarrow{AD} = 2\left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD}\right) = 2\overrightarrow{BD}$

$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{CQ} = -\overrightarrow{CP} + \overrightarrow{CQ} = -3\overrightarrow{CD} + 3\overrightarrow{CB} = -3\left(\overrightarrow{CD} - \overrightarrow{CB}\right)$

$\overrightarrow{PQ} = -3\left(\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BC}\right) = -3\left(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}\right) = -3\overrightarrow{BD}$

2) وجدنا ❶ $\overrightarrow{BD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{MN}$ يعني $\overrightarrow{MN} = 2\overrightarrow{BD}$

ووجدنا ❷ $\overrightarrow{BD} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{PQ}$ يعني $\overrightarrow{PQ} = -3\overrightarrow{BD}$

من ❶ و ❷ نستنتج أن : $\frac{1}{2}\overrightarrow{MN} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{PQ}$ أي $\overrightarrow{MN} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{PQ}$

ومنه المتجهتين $\overrightarrow{MN}$ و $\overrightarrow{PQ}$ مستقيميتان .

3) وجدنا $\overrightarrow{MN} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{PQ}$ اذن المستقيمان (MN) و (PQ) متوازيان

IV. التعريف المتجهي لمستقيم في الفضاء :

لتكن نقطة A من الفضاء و $\vec{u}$ متجهة غير منعدمة

المستقيم (D) الذي يمر من A و $\vec{u}$ متجهة موجهة له نرمز له بالرمز $D\left(A;\vec{u}\right)$ ولدينا : $M \in D \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R}; \overrightarrow{AM} = k\vec{u}$

$M \in (AB) \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R}; \overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB}$

V. التعريف المتجهي لمستوى في الفضاء :

A و B و C ثلاث نقط من الفضاء غير مستقيمية

$\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ متجهتين غير مستقيميتين و A و B و C تكون لنا مستوى $(P) = ABC$ نقول $(P) = ABC$ مستوى يمر من النقطة A و $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ متجهتين موجهتين له ونكتب : $P\left(A;\vec{u};\vec{v}\right) = ABC$

$M \in P\left(A;\vec{u};\vec{v}\right) \Leftrightarrow$ مستوائية $\overrightarrow{AM}$ و $\vec{v}$ و $\vec{u}$

$M \in P\left(A;\vec{u};\vec{v}\right) \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R}; \overrightarrow{AM} = k\vec{u}$

$M \in P\left(A;\vec{u};\vec{v}\right) \Leftrightarrow \exists x \in \mathbb{R}; \exists y \in \mathbb{R}\ \overrightarrow{AM} = x\vec{u} + y\vec{v}$

$M \in ABC \Leftrightarrow$ مستوائية $\overrightarrow{AM}$ و $\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{AB}$

مثال : ليكن $ABCD$ رباعي الأوجه و M نقطة من الفضاء بحيث : $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}$

1)أكتب المتجهة $\overrightarrow{AM}$ بدلالة $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$

2)استنتج أن النقطة M تنتمي إلى المستوى (ABC)

3)استنتج أن المتجهات $\overrightarrow{IJ}$ و $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{EC}$ مستوائية .

أجوبة : 1) $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2} \times \overrightarrow{AB} + 1 \times \overrightarrow{AC}$

2) وجدنا $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2} \times \overrightarrow{AB} + 1 \times \overrightarrow{AC}$ ومنه النقطة M تنتمي إلى المستوى

3) وجدنا $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2} \times \overrightarrow{AB} + 1 \times \overrightarrow{AC}$ ومنه المتجهات $\overrightarrow{AM}$ و $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ مستوائية

الأستاذ : عثماني نجيب

للمزيد من الملفات قم بزيارة الموقع : Talamid.ma