

الأستاذ:
نجيب
عثماني

تمارين محلولة: دراسة الدوال وتمثيلها
المستوى : الأولى باك علوم تجريبية

أكاديمية
الجهة
الشرقية

أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ وأول هندسيا النتيجة

الجواب : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$

التأويل الهندسي : (C_f) يقبل فرعا شلجيا اتجاهه محور الأرتايب بجوار $+\infty$

تمرين 6: نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة

كالتالي : $f(x) = \sqrt{x} - x$

1. حدد حيز تعريف الدالة f وأحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

2. حدد طبيعة الفرع اللانهائي لمنحنى الدالة f

الجواب : (1) $D_f = \mathbb{R}^+$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} - x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x}(1 - \sqrt{x}) = -\infty$ (2)

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x} - x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x}}{x} - 1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} - 1 = \frac{1}{+\infty} - 1 = -1 = a$ (3)

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - ax = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - (-1)x = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) + x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty$

التأويل الهندسي : (C_f) يقبل فرعا شلجيا اتجاهه المستقيم

ذي المعادلة $y = -x \Leftrightarrow y = (-1)x$ بجوار $+\infty$

تمرين 7: نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$

كالتالي : $f(x) = \frac{1}{12}x^4 - 2x^2 + x + \frac{2}{3}$

1. أحسب $f''(x)$ لكل x من $\mathbb{R}$

2. أدرس تقعر المنحنى (C_f) الممثل للدالة f مع تحديد نقطتي انعطافه

الجواب : (1)

$f'(x) = \left(\frac{1}{12}x^4 - 2x^2 + x + \frac{2}{3} \right)' = \frac{1}{12}4x^3 - 4x + 1 = \frac{1}{3}x^3 - 4x + 1$

$f''(x) = \left(\frac{1}{3}x^3 - 4x + 1 \right)' = x^2 - 4$

$(x-2)(x+2) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow f''(x) = 0$ (2)

$x = -2$ أو $x = 2 \Leftrightarrow$

x	$-\infty$	-2	2	$+\infty$	
x^2-4	$+$	0	$-$	0	$+$

• تقعر (C_f) موجه نحو محور الأرتايب الموجبة على

المجال: $]-\infty; -2] \cup [2; +\infty[$

• تقعر (C_f) موجه نحو محور الأرتايب الموجبة

على المجال: $[-2, 2]$

يمكن تلخيص النتائج في جدول التقعر

$A(1, f(1))$ و $B(-1, f(-1))$ نقطتي انعطافه

تمرين 1: نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة كالتالي :

$f(x) = \frac{2x-1}{3x-6}$

حدد $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$ وأول النتيجة هندسيا

الجواب : $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2x-1}{3x-6}$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$3x-6$	$-$	0	$+$

$\lim_{x \rightarrow 2^-} 3x-6 = 0^-$ و $\lim_{x \rightarrow 2^+} 3x-6 = 0^+$ و $\lim_{x \rightarrow 2^+} 2x-1 = 3$

ومنه : $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -\infty$ و $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = +\infty$

التأويل المباني : المستقيم ذا المعادلة $x = 2$ مقارب للمنحنى (C_f)

تمرين 2: نعتبر الدالة العددية f

المتغير الحقيقي x المعرفة كالتالي : $f(x) = \frac{6x+1}{2x-5}$

حدد $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ وأول النتيجة هندسيا

الجواب : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{6x}{2x} = \frac{6}{2} = 3$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6x}{2x} = \frac{6}{2} = 3$

التأويل المباني : المستقيم ذا المعادلة $y = 3$ مقارب للمنحنى (C_f)

تمرين 3: نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة

كالتالي : $f(x) = 2x - 1 + \frac{1}{x-3}$

1. حدد D_f مجموعة تعريف الدالة f

2. حدد معادلة المقارب المائل لمنحنى الدالة f بجوار $+\infty$

الجواب :

$D_f = \{x \in \mathbb{R} / x-3 \neq 0\}$ (1)

ومنه $D_f = \mathbb{R} - \{3\} =]-\infty; 3[\cup]3; +\infty[$

(2) $f(x) - (2x-1) = \frac{1}{x-3}$ يعني $f(x) = 2x-1 + \frac{1}{x-3}$

يعني $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - (2x-1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x-3} = \frac{1}{+\infty} = 0$ ومنه المستقيم

ذا المعادلة $y = 2x-1$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $+\infty$

تمرين 4: نعتبر الدالة العددية f المعرفة كالتالي : $f(x) = \sqrt{x}$

أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ وأول هندسيا النتيجة

الجواب : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{+\infty} = 0$

التأويل الهندسي : (C_f) يقبل فرعا شلجيا اتجاهه محور

الأفاصيل بجوار $+\infty$

تمرين 5: نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x

المعرفة كالتالي : $f(x) = x^3$

(8) أرسم (C_f) المنحنى الممثل للدالة f و المستقيم (D) الذي معادلته $y = 3$ في (D) : $y = 3$ في معلم متعامد ممنظم $(o; \vec{i}; \vec{j})$.

(9) حدد نقط تقاطع (C_f) و (D) .

(10) حل مبيانيا في $\mathbb{R}$ المتراجحة $x^2 + 4x \geq 0$.

الأجوبة: $f(x) = x^2 + 4x + 3$

(1) الدالة f حدودية اذن $D_f = \mathbb{R}$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 + 4x + 3 = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 + 4x + 3 = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty$$

$$\forall x \in \mathbb{R} : f'(x) = (x^2 + 4x + 3)' = 2x + 4$$

$$x = -2 \text{ يعني } 2x + 4 = 0 \text{ يعني } f'(x) = 0$$

ندرس إشارة : $f'(x)$

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
$2x+4$	$-$	0	$+$

إذا كانت: $x \in [-2; +\infty[$ فان : $f'(x) \geq 0$ ومنه f تزايديه

إذا كانت: $x \in]-\infty; -2]$ فان : $f'(x) \leq 0$ ومنه f تناقصية

(4) نلخص النتائج في جدول يسمى جدول التغيرات :

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$	-1	$+\infty$

$$x_0 = -1 \quad y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \quad (5)$$

$$y = 2x + 2 \Leftrightarrow y = 2(x + 1) \Leftrightarrow y = f(-1) + f'(-1)(x + 1)$$

$$\text{لأن : } f(1) = 0 \text{ و } f'(1) = 2$$

(6) تحديد نقط التقاطع مع محور الأفاصيل

$$\text{نحل المعادلة : } f(x) = 0 \text{ يعني } x^2 + 4x + 3 = 0$$

نحل المعادلة باستعمال المميز

$$c = 3 \text{ و } b = 4 \text{ و } a = 1$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (4)^2 - 4 \times 3 \times 1 = 16 - 12 = 4 = (2)^2 > 0$$

بما أن $\Delta > 0$ فان هذه المعادلة تقبل حلين هما:

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ و } x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x_2 = \frac{-4 - \sqrt{4}}{2 \times 1} = \frac{-4 - 2}{2 \times 1} = -3 \text{ و } x_1 = \frac{-4 + \sqrt{4}}{2 \times 1} = \frac{-4 + 2}{2 \times 1} = -1$$

ومنه نقط التقاطع هم : $A(-1; 0)$ و $B(-3; 0)$

(ب) نقط تقاطع (C_f) المنحنى الممثل للدالة f مع محور الأرتيب

نحسب فقط : $f(0)$

$$f(0) = 3 \text{ ومنه نقطة التقاطع هي : } C(0; 3)$$

(7) الدالة تقبل قيمة دنيا هي : -1

(8) رسم (C_f) المنحنى الممثل للدالة f

و المستقيم $(D) : y = 3$

تمرين 8: نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة

$$\text{كالتالي : } f(x) = \sqrt{x - x^2}$$

1. حدد حيز تعريف الدالة f

2. بين أن المستقيم $x = \frac{1}{2}$ محور تماثل للمنحنى (C_f) الممثل للدالة f

الجواب:

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} / x - x^2 \geq 0\} \quad f(x) = \sqrt{x - x^2} \quad (1)$$

$$x = 1 \text{ و } x = 0 \Leftrightarrow x(1 - x) = 0 \Leftrightarrow x - x^2 = 0$$

ومنه جدول الإشارة :

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$	
$x-x^2$	$-$	0	$+$	0	$-$

ومنه : $D_f = [0, 1]$

$$(2) \quad x = a \text{ يعني } x = \frac{1}{2}$$

(أ) نبين أنه : إذا كانت $x \in [0, 1]$ فان : $1 - x \in [0, 1]$ ؟؟؟

$$\Leftrightarrow 1 - 1 \leq 1 - x \leq 1 - 0 \Leftrightarrow -1 \leq -x \leq 0 \Leftrightarrow 0 \leq x \leq 1 \Leftrightarrow x \in [0, 1]$$

$$1 - x \in [0, 1] \Leftrightarrow 0 \leq 1 - x \leq 1 \Leftrightarrow$$

(ب) نبين أن : $f(1 - x) = f(x)$ ؟؟؟؟

$$f(1 - x) = \sqrt{(1 - x) - (1 - x)^2} = \sqrt{1 - x - (1 - 2x + x^2)}$$

$$= \sqrt{1 - x - 1 + 2x - x^2} = \sqrt{x - x^2} = f(x)$$

ومنه $x = \frac{1}{2}$ محور تماثل منحنى الدالة f .

تمرين 9: نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x

$$\text{المعرفة كالتالي : } f(x) = \frac{x^2 - x}{x + 1}$$

1. بين أن $\forall x \in D_f \quad f(x) = x - 2 + \frac{2}{x + 1}$

2. بين أن النقطة $\Omega(-1; -3)$ مركز تماثل منحنى الدالة f .

$$\text{الجواب : (1)} \quad x - 2 + \frac{2}{x + 1} = \frac{(x - 2)(x + 1) + 2}{x + 1} = \frac{x^2 - x}{x + 1} = f(x)$$

$$(2) \quad \Omega(a; b) \quad \Omega(-1; -3)$$

(أ) نبين أنه : إذا كانت $x \in \mathbb{R} - \{-1\}$ فان : $-2 - x \in \mathbb{R} - \{-1\}$ ؟؟؟

$$\Leftrightarrow -2 - x \neq -2 + 1 \Leftrightarrow -x \neq 1 \Leftrightarrow x \neq -1 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R} - \{-1\}$$

$$-2 - x \in \mathbb{R} - \{-1\} \Leftrightarrow -2 - x \neq -1 \Leftrightarrow$$

(ب) نبين أن : $f(-2 - x) + f(x) = -6 = 2b$ ؟؟؟؟

$$f(-4 - x) + f(x) = -4 - x - 1 + \frac{1}{-4 - x + 2} + x - 1 + \frac{1}{x + 2}$$

$$= -4 - 2 + \frac{1}{-x - 2} + \frac{1}{x + 2} = -6 + \frac{1}{x + 2} + \frac{1}{x + 2} = -6$$

ومنه $\Omega(-2; -3)$ مركز تماثل منحنى الدالة f .

تمرين 10: نعتبر الدالة f المعرفة كالتالي :

$$f(x) = x^2 + 4x + 3$$

(1) حدد D_f (2) أحسب نهايات f عند محددات D_f

(3) أحسب مشتقة الدالة f و أدرس إشارتها (4) حدد جدول تغيرات f

(5) حدد معادلة لمماس منحنى الدالة f في النقطة الذي أفصولها $x_0 = -1$

(6) حدد نقط تقاطع (C_f) مع محوري المعلم

(7) حدد مطايف الدالة f ان وجدت

لأن نهاية دالة حدودية عند مالانهاية هي نهاية حدها الأكبر درجة

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{3}x^3}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{3}x^2 = +\infty \quad (4)$$

(C_f) يقبل فرعاً شلجماً اتجاهه محور الأرتيب بجوار $+\infty$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{1}{3}x^3}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{3}x^2 = +\infty$$

(C_f) يقبل فرعاً شلجماً اتجاهه محور الأرتيب بجوار $-\infty$

$$f'(x) = \left(\frac{1}{3}x^3 - 4x\right)' = \frac{1}{3} \times 3x^2 - 4 = x^2 - 4 \quad (5)$$

$$(x-2)(x+2) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow f'(x) = 0$$

$$x = -2 \text{ أو } x = 2 \Leftrightarrow$$

x	$-\infty$	-2	2	$+\infty$	
x^2-4	$+$	0	$-$	0	$+$

(6)

x	$-\infty$	-2	2	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$		$16/3$		$-16/3$	$+\infty$
	$-\infty$				

(7) معادلة لمماس ل (C_f) في النقطة A التي أفصولها $x_0 = -1$

$$f'(-1) = -3 \text{ و } f(-1) = \frac{11}{3} \text{ و } y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

$$y = -3x + \frac{2}{3} \Leftrightarrow y = \frac{11}{3} - 3(x+1) \Leftrightarrow y = f(-1) + f'(-1)(x+1)$$

(8) أ) نقط تقاطع (C_f) المنحنى الممثل للدالة f مع محور الأفصيل

$$\text{نحل فقط المعادلة : } f(x) = 0 \text{ يعني } \frac{1}{3}x^3 - 4x = 0$$

$$\text{يعني } \frac{1}{3}x^2 - 4 = 0 \text{ أو } x = 0 \text{ يعني } x\left(\frac{1}{3}x^2 - 4\right) = 0$$

$$\text{يعني } x = 0 \text{ أو } x^2 = 12 \text{ يعني } x = 0 \text{ أو } x = \sqrt{12} \text{ أو } x = -\sqrt{12}$$

$$\text{يعني } x = 0 \text{ أو } x = 2\sqrt{3} \text{ أو } x = -2\sqrt{3}$$

ومنه نقط التقاطع هم : $A(2\sqrt{3}; 0)$ و $B(-2\sqrt{3}; 0)$ و $O(0; 0)$

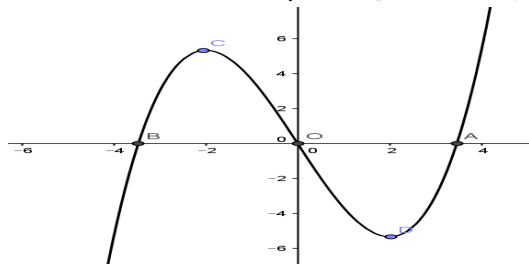
(ب) نقط تقاطع (C_f) المنحنى الممثل للدالة f مع محور الأرتيب

نحسب فقط : $f(0) = 0$ لدينا $f(0) = 0$ ومنه نقطة التقاطع هي : $O(0; 0)$

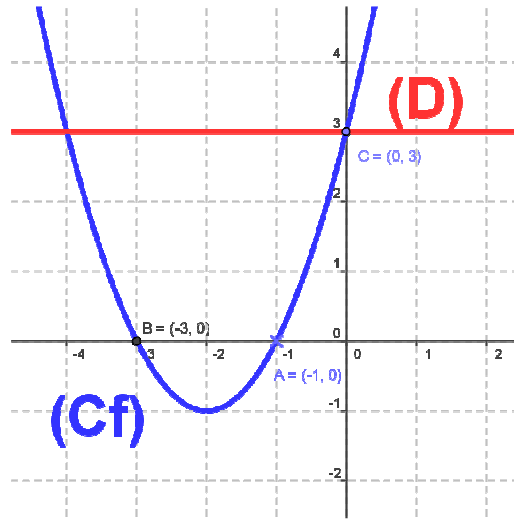
$$(9) f(2) = -\frac{16}{3} \text{ هي قيمة دنيا للدالة } f$$

$$f(-2) = \frac{16}{3} \text{ هي قيمة قصوى للدالة } f$$

(9) التمثيل المبياني للدالة f



x	-4	-3	-2	-1	0	1
$f(x)$	3	0	-1	0	3	8



(9) تحديد نقط تقاطع (C_f) و (D) .

نحل المعادلة : $f(x) = y$ يعني $x^2 + 4x + 3 = 3$

يعني $x^2 + 4x = 0$ يعني $x(x+4) = 0$ يعني $x = 0$ أو $x = -4$

يعني $x = 0$ أو $x = -4$

ومنه نقط التقاطع هم : $F(-4; 3)$ و $E(0; 3)$

$$(10) \Leftrightarrow x^2 + 4x + 3 \geq 3 \Leftrightarrow x^2 + 4x \geq 0$$

$$\Leftrightarrow f(x) \geq y \Leftrightarrow \text{منحنى الدالة } (C_f)$$

يوجد فوق المستقيم (D) ومنه : $S = [-4; 0]$

تمرين 11: تعتبر الدالة f المعرفة كالتالي : $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 4x$

1. حدد D_f حيز تعريف الدالة f

2. أدرس زوجية الدالة f

3. أحسب نهايات الدالة f عند محددات D_f

4. أدرس الفروع اللانهاية لمنحنى الدالة f

5. أحسب مشتقة الدالة f و أدرس إشارتها

6. حدد جدول تغيرات الدالة f

7. حدد معادلة لمماس المنحنى (C_f) الممثل للدالة f في

النقطة A التي أفصولها $x_0 = -1$

8. حدد نقط تقاطع المنحنى (C_f) الممثل للدالة f مع محوري المعلم.

9. حدد مطايف الدالة f اذا وجدت

10. أرسم المنحنى (C_f) الممثل للدالة f في معلم متعامد ممنظم

أجوبة : $D_f = \mathbb{R}$ (1) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 4x$ لأنها دالة حدودية

(2) أ) اذا كانت $x \in \mathbb{R}$ فان $-x \in \mathbb{R}$

$$\text{ب) } f(-x) = \frac{1}{3}(-x)^3 - 4(-x) = -\frac{1}{3}x^3 + 4x = -\left(\frac{1}{3}x^3 - 4x\right) = -f(x)$$

ومنه f دالة فردية

$$(3) \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty$$

تمرين 12: نعتبر الدالة العددية g المعرفة ب: $g(x) = \frac{2x+1}{x+1}$

1. حدد حيز تعريف الدالة g .
 2. أحسب نهايات الدالة g في محددات حيز التعريف و أول النتائج هندسيا.
 3. أحسب الدلة المشتقة. ثم ضع جدول تغيرات الدالة g .
 4. أنشئ منحنى الدالة g .
- (الحل:1)** حيز تعريف الدالة g هو: $D = \{x \in \mathbb{R} / x+1 \neq 0\} = \mathbb{R} - \{-1\}$ و منه $D =]-\infty, -1[\cup]-1, +\infty[$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x+1}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{x} = 2 \text{ و } \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x+1}{x+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{x} = 2$$

يعني المستقيم ذا المعادلة $y = 2$ مقارب أفقي للمنحنى (C_f) .

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{2x+1}{x+1} = +\infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow -1^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{2x+1}{x+1} = -\infty$$

يعني المستقيم ذا المعادلة $x = -1$ مقارب عمودي للمنحنى.

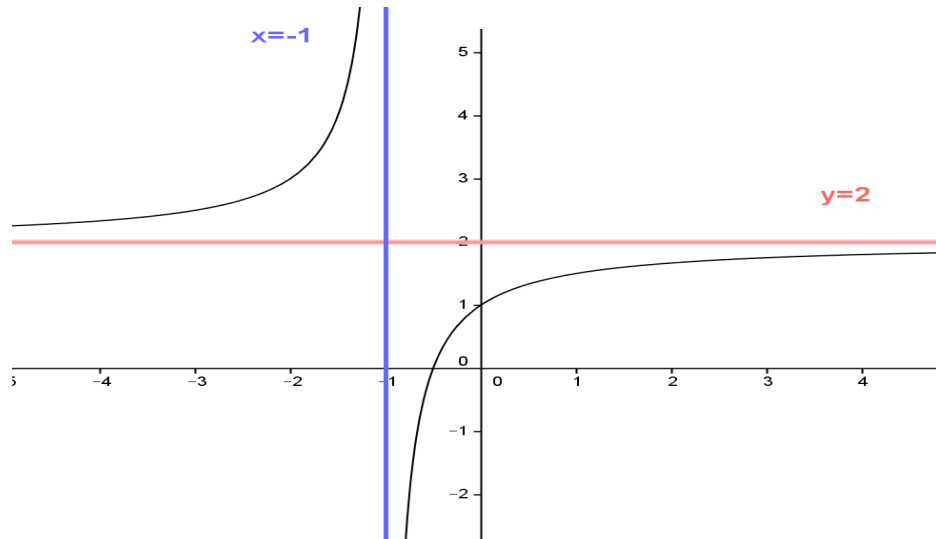
$$(3) \text{ لكل } x \text{ من } D \text{ لدينا: } g'(x) = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}{(x+1)^2} = \frac{1}{(x+1)^2}$$

يعني: $g'(x) > 0$ ($\forall x \in D$)

جدول تغيرات الدالة.

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$g'(x)$	+		+
$g(x)$	2	$+\infty$	2

منحنى الدالة g .



تمرين 13: لتكن f دالة معرفة ب: $f(x) = \frac{2x+3}{x+2}$

1. حدد مجموعة تعريف الدالة f
2. أحسب النهايات التالية: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x)$
3. أحسب مشتقة الدالة f وأدرس إشارتها
4. حدد جدول تغيرات الدالة f .
5. حدد نقط تقاطع (C_f) المنحنى الممثل للدالة f مع محور الأفاصيل.
6. حدد نقط تقاطع (C_f) المنحنى الممثل للدالة f مع محور الأرتيب.
7. أرسم (C_f) المنحنى الممثل للدالة f

الأجوبة:

1) حيز تعريف الدالة f هو: $D = \{x \in \mathbb{R} / x+2 \neq 0\} = \mathbb{R} - \{-2\}$

و منه $D =]-\infty, -2[\cup]-2, +\infty[$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x+3}{x+2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{x} = 2 \text{ و } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x+3}{x+2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{x} = 2 \quad (2)$$

يعني المستقيم ذا المعادلة $y = 2$ مقارب أفقي للمنحنى (C_f) .

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
$x+2$	$-$	0	$+$

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{2x+3}{x+2} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{2x+3}{x+2} = +\infty \text{ و}$$

يعني المستقيم ذا المعادلة $x = 2$ مقارب عمودي للمنحنى.

(3) **طريقة 1 :**

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2} \quad \text{نستعمل القاعدة التالية :} \quad f(x) = \frac{2x+3}{x+2}$$

لكل x من D لدينا:

$$g'(x) = \left(\frac{2x+3}{x+2}\right)' = \frac{(2x+3)'(x+2) - (2x+3)(x+2)'}{(x+2)^2} = \frac{2(x+2) - 1(2x+3)}{(x+2)^2}$$

$$f'(x) = \frac{2x+4-2x-3}{(x+2)^2} = \frac{1}{(x+2)^2} > 0 \text{ لكل } x \text{ من } D$$

$$f'(x) = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}}{(x+2)^2} = \frac{1}{(x+2)^2} \text{ لكل } x \text{ من } D \text{ لدينا:} \quad \textbf{طريقة 2 :}$$

يعني: $(\forall x \in D) f'(x) > 0$

(4) جدول تغيرات الدالة:

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
$f'(x)$	$+$		$+$
$f(x)$	2	$+\infty$	2

(5) تحديد نقط التقاطع مع محور الأفاسيل نحل المعادلة :

$$2x+3=0 \text{ يعني } \frac{2x+3}{x+2}=0 \text{ يعني } f(x)=0$$

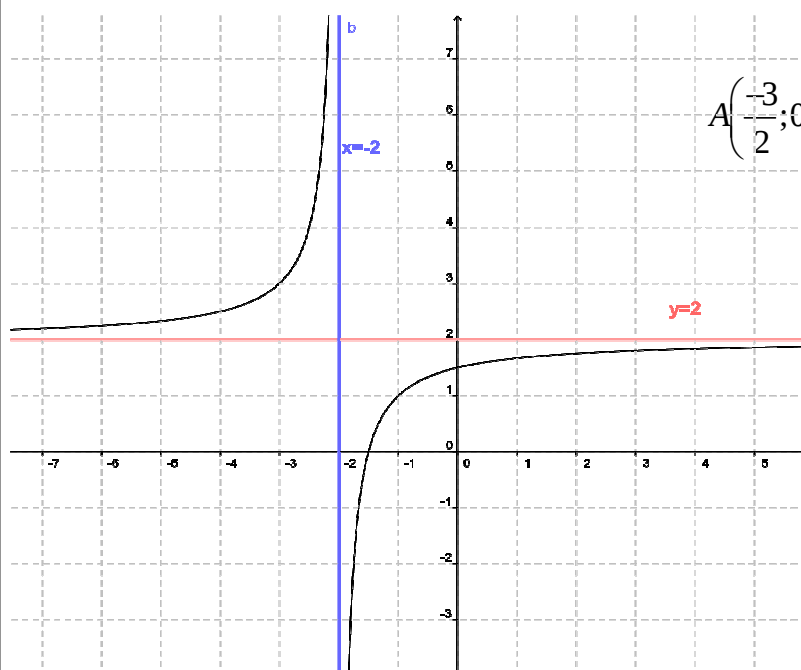
$$A\left(-\frac{3}{2}; 0\right) \text{ : يعني } x = -\frac{3}{2} \text{ ومنه نقطة التقاطع مع محور الأفاسيل هي}$$

(6) نقط تقاطع (C_f) المنحنى الممثل للدالة f مع محور

الأرتيبيحسب فقط : $f(0)$

$$B\left(0; \frac{3}{2}\right) \text{ : ومنه نقطة التقاطع هي: } f(0) = \frac{3}{2}$$

(7) رسم C_f



تمرين 14: نعتبر الدالة f المعرفة كالتالي : $f(x) = \sqrt{4x^2 + 2x - 2}$

1. حدد D_f و حدد $f'(x)$

2. أحسب : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

3. بين : $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = -2$ و أحسب : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) + 2x$

4. أستنتج معادلة المقارب المائل لمنحنى الدالة f بجوار $-\infty$

أجوبة (1): $D_f = \{x \in \mathbb{R} / 4x^2 + 2x - 2 \geq 0\}$

$$2x^2 + x - 1 = 0 \Leftrightarrow 4x^2 + 2x - 2 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (1)^2 - 4 \times 2 \times (-1) = 1 + 8 = 9 = (3)^2 > 0$$

بما أن $\Delta > 0$ فان هذه الحدودية لها جذرين هما:

$$x_1 = \frac{-1+3}{2 \times 2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \quad \text{و} \quad x_2 = \frac{-4}{4} = -1 \quad \text{ومنه جدول الاشارة :}$$

x	$-\infty$	-1	$1/2$	$+\infty$	
$4x^2+2x-2$	+	0	-	0	+

$$\text{ومنه: } D_f =]-\infty; -1] \cup \left[\frac{1}{2}; +\infty\right[$$

$$\forall x \in]-\infty; -1[\cup \left[\frac{1}{2}; +\infty\right[$$

$$f'(x) = \left(\sqrt{4x^2 + 2x - 2}\right)' = \frac{(4x^2 + 2x - 2)'}{2\sqrt{4x^2 + 2x - 2}} = \frac{8x + 2}{2\sqrt{4x^2 + 2x - 2}} = \frac{4x + 1}{\sqrt{4x^2 + 2x - 2}}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{4x^2 + 2x - 2} \quad (2)$$

$$\text{لدينا : } \lim_{x \rightarrow -\infty} 4x^2 + 2x - 2 = \lim_{x \rightarrow -\infty} 4x^2 = +\infty \quad \text{ومنه } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{4x^2 + 2x - 2}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 \left(4 + \frac{2}{x} - \frac{2}{x^2}\right)} \quad (3)$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x| \sqrt{4 + \frac{2}{x} - \frac{2}{x^2}}}{x}$$

$$\text{لدينا : } x \rightarrow -\infty \quad \text{ومنه : } |x| = -x$$

ومنه

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x \sqrt{4 + \frac{2}{x} - \frac{2}{x^2}}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} -\sqrt{4 + \frac{2}{x} - \frac{2}{x^2}} = -\sqrt{4} = -2 = a$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) + 2x = \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{4x^2 + 2x - 2} + 2x = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(\sqrt{4x^2 + 2x - 2} + 2x)(\sqrt{4x^2 + 2x - 2} - 2x)}{(\sqrt{4x^2 + 2x - 2} - 2x)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x^2 + 2x - 2 - 4x^2}{|x| \sqrt{4 + \frac{2}{x} - \frac{2}{x^2}} - 2x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x - 2}{-x \sqrt{4 + \frac{2}{x} - \frac{2}{x^2}} - 2x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x - 2}{-x \sqrt{4 + \frac{2}{x} - \frac{2}{x^2}} - 2x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x \left(2 - \frac{2}{x}\right)}{-x \left(\sqrt{4 + \frac{2}{x} - \frac{2}{x^2}} + 2\right)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2 - \frac{2}{x}}{-\left(\sqrt{4 + \frac{2}{x} - \frac{2}{x^2}} + 2\right)} = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2} = b$$

$$(4) \text{ومنه : } y = ax + b \text{ أي } y = -2x - \frac{1}{2} \text{ مقارب مائل لمنحنى الدالة } f$$

بجوار $-\infty$