

المستوى : الأولى باك علوم تجريبية الأستاذ : عثمانى نجيب مذكرة رقم 11	مادة الرياضيات	أكاديمية الجهة الشرقية نيابة وجدة
--	----------------	--------------------------------------

مذكرة رقم 11 في درس دراسة الدوال

الأهداف و القدرات المنتظرة من الدرس :

محتوى البرنامج	القدرات المنتظرة	توجيهات تربوية
- الفروع اللانهائية: المستقيمات المقاربة؛ الاتجاهات المقاربة؛ - نقط الانعطاف؛ تقعر منحنى دالة؛ - عناصر تماثل منحنى دالة.	- حل مبياني لمعادلات ومترجمات؛ - استعمال الدورية وعناصر تماثل منحنى في اختصار مجموعة دراسة دالة؛ - استعمال إشارة المشتقة الثانية لدراسة تقعر منحنى وتحديد نقط انعطافه؛ - دراسة وتمثيل دوال حدودية ودوال جذرية ودوال لاجزئية؛ - دراسة وتمثيل دوال مثلثية بسيطة.	- ينبغي الاقتصار على تحديد نهايات دوال بسيطة (دوال حدودية من الدرجة الثانية والدرجة الثالثة أو دوال من الشكل $\lim_{x \rightarrow +\infty} \phi(x) = 0$ حيث $x \rightarrow ax+b+\phi(x)$ عند محددات مجموعات تعريفها وتحديد فروعها اللانهائية؛ - ينبغي دراسة دوال لا يطرح حساب وإشارة مشتقاتها صعوبة بالغة؛ - ينبغي تناول الحل المبياني لمعادلات ومترجمات من النوع $f(x) \leq c$ و $f(x) = c$ و $f(x) < g(x)$ و $f(x) = g(x)$ و $f(x) \leq g(x)$ حيث f و g دالتان من بين الدوال الواردة في البرنامج إذا لم يكن الحل الجبري في المتناول.

والمقاربات الموازي لمحور الأفافيل

تعريف: إذا كانت: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = a$ أو $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = a$

نقول إن المستقيم ذا المعادلة $y = a$ مقارب للمنحنى (C_f)

بجوار $+\infty$ (أو بجوار $-\infty$)

مثال: نعتبر الدالة العددية f

$$f(x) = \frac{6x+1}{2x-5}$$

حدد $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ وأول النتيجة هندسيا

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{6x}{2x} = \frac{6}{2} = 3 \text{ و } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6x}{2x} = \frac{6}{2} = 3$$

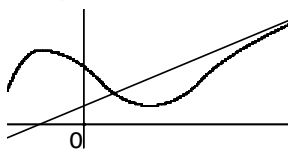
التأويل المبياني: المستقيم ذا المعادلة $y = 3$ مقارب للمنحنى (C_f)

المقاربات المائل

لنكن f دالة عددية لمتغير حقيقي x و تقبل نهاية غير منتهية

بجوار $+\infty$ (أو بجوار $-\infty$)

إذا كانت: $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (ax+b)) = 0$ (أو $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - (ax+b)) = 0$)



حيث $a \in \mathbb{R}$ و $b \in \mathbb{R}$

نقول إن المستقيم ذا المعادلة

$y = ax + b$ مقارب مائل

للمنحنى (C_f) بجوار $+\infty$ (أو بجوار $-\infty$)

مثال: نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة

$$f(x) = 2x - 1 + \frac{1}{x-3}$$

1. حدد D_f مجموعة تعريف الدالة f

2. حدد معادلة المقارب المائل للمنحنى الدالة f بجوار $+\infty$

الجواب:

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} / x-3 \neq 0\} \quad \text{ومنه } D_f = \mathbb{R} - \{3\} =]-\infty; 3[\cup]3; +\infty[$$

$$(2) \quad f(x) - (2x-1) = \frac{1}{x-3} \text{ يعني } f(x) = 2x-1 + \frac{1}{x-3}$$

I. المستقيمات المقاربة

في جميع فقرات الدرس، ننسب المستوى إلى معلم متعامد $(O; \vec{i}; \vec{j})$

1. فرع لا نهائي لمنحنى دالة عددية

تعريف: لنكن f دالة عددية لمتغير حقيقي x

و (C_f) منحنائها في المعلم $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

إذا آلت إحدى إحداثيتي نقطة من (C_f) إلى ما

لا نهاية، نقول إن (C_f) يقبل فرعاً لا نهائياً.

2. المقاربات الموازي لمحور الأرتاب

تعريف: إذا كانت:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty \text{ أو } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty \text{ أو } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$$

نقول إن المستقيم ذا المعادلة $x = a$ مقارب

للمنحنى (C_f)

مثال: نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة كالتالي:

$$f(x) = \frac{2x-1}{3x-6}$$

حدد $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$ وأول النتيجة هندسيا

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2x-1}{3x-6}$$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$3x-6$	$-$	0	$+$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} 3x-6 = 0^- \text{ و } \lim_{x \rightarrow 2^+} 3x-6 = 0^+ \text{ و } \lim_{x \rightarrow 2^+} 2x-1 = 3$$

ومنه: $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -\infty$ و $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = +\infty$

التأويل المبياني: المستقيم ذا المعادلة $x = 2$ مقارب للمنحنى (C_f)

التأويل الهندسي : (C_f) يقبل فرعاً شلجياً اتجاهه المستقيم ذي المعادلة

$$y = -x \Leftrightarrow y = (-1)x \text{ بجوار } +\infty$$

III. تقعر منحنى - نقط الانعطاف

خاصية: لتكن f دالة قابلة للاشتقاق مرتين على مجال I و (C_f)

منحناها في المعلم $(o; \vec{i}; \vec{j})$.

إذا كانت f'' موجبة على المجال I فإن للمنحنى (C_f) تقعراً

موجهاً نحو محور الأرتابب الموجبة.

إذا كانت f'' سالبة على المجال I فإن للمنحنى (C_f) تقعراً

موجهاً نحو محور الأرتابب السالبة.

إذا كانت f'' تنعدم في النقطة $x_0 \in I$ وتتغير إشارتها

بجوار x_0 فإن النقطة $A(x_0; f(x_0))$ نقطة انعطاف المنحنى (C_f) .

مثال: نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$

$$f(x) = \frac{1}{12}x^4 - 2x^2 + x + \frac{2}{3} \text{ كالتالي :}$$

1. أحسب $f''(x)$ لكل x من $\mathbb{R}$

2. أدرس تقعر المنحنى (C_f) الممثل للدالة f

مع تحديد نقطتي انعطافه

الجواب : (1)

$$f'(x) = \left(\frac{1}{12}x^4 - 2x^2 + x + \frac{2}{3} \right)' = \frac{1}{12}4x^3 - 4x + 1 = \frac{1}{3}x^3 - 4x + 1$$

$$f''(x) = \left(\frac{1}{3}x^3 - 4x + 1 \right)' = x^2 - 4$$

$$(x-2)(x+2)=0 \Leftrightarrow x^2-2^2=0 \Leftrightarrow x^2-4=0 \Leftrightarrow f''(x)=0$$

$$x = -2 \text{ أو } x = 2 \Leftrightarrow$$

x	$-\infty$	-2	2	$+\infty$	
x^2-4	$+$	0	$-$	0	$+$

• تقعر (C_f) موجه نحو محور الأرتابب الموجبة على المجال:

$$]-\infty; -2] \cup [2; +\infty[$$

• تقعر (C_f) موجه نحو محور الأرتابب الموجبة على المجال: $[-2, 2]$

يمكن تلخيص النتائج في جدول التقعر

$A(1, f(1))$ و $B(-1, f(-1))$ نقطتي انعطافه

IV. محور تماثل - مركز تماثل

خاصية: لتكن f دالة عددية لمتغير حقيقي x معرفة

على مجموعة D و (C_f) منحناها في المعلم $(o; \vec{i}; \vec{j})$.

يكون المستقيم ذو المعادلة $x = a$

$(a \in \mathbb{R})$ محور تماثل المنحنى (C_f) إذا

و فقط إذا كان : $\{(\forall x \in D); (2a-x) \in D$

$\{(\forall x \in D); f(2a-x) = f(x)$

تكون النقطة $\Omega(a; b)$ مركز تماثل المنحنى (C_f)

إذا و فقط إذا كان : $\{(\forall x \in D); (2a-x) \in D$

$\{(\forall x \in D); f(2a-x) = 2b - f(x)$

مثال 1: نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة

$$f(x) = \sqrt{x-x^2} \text{ كالتالي :}$$

1. حدد حيز تعريف الدالة

يعني $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - (2x-1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x-3} = \frac{1}{+\infty} = 0$ ومنه المستقيم ذا

المعادلة $y = 2x-1$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $+\infty$

خاصية: يكون المستقيم ذو المعادلة $y = ax+b$ ($a \neq 0$) مقارباً مائلاً

للمنحنى (C_f) بجوار $+\infty$ إذا و فقط إذا كان : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = a$

$$\text{و } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - ax = b$$

II. الفروع الشلجية

لتكن f دالة عددية لمتغير حقيقي x بحيث تقبل نهاية لا منتهية بجوار

$+\infty$ (أو بجوار $-\infty$) و (C_f) منحناها في معلم متعامد $(o; \vec{i}; \vec{j})$.

1. فرع شلجي اتجاهه محور الأفاصيل

تعريف: إذا كانت $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$ (أو $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$) نقول إن المنحنى

(C_f) يقبل فرعاً شلجياً اتجاهه محور

الأفاصيل بجوار $+\infty$ (أو بجوار $-\infty$)

مثال: نعتبر الدالة العددية f المعرفة كالتالي : $f(x) = \sqrt{x}$

أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ وأول هندسيا النتيجة

$$\text{الجواب : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{+\infty} = 0$$

التأويل الهندسي : (C_f) يقبل فرعاً شلجياً اتجاهه محور

الأفاصيل بجوار $+\infty$

2. فرع شلجي اتجاهه محور الأرتابب

تعريف: إذا كانت $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$ أو $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty$ أو

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty \text{ أو } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty \text{ نقول}$$

إن المنحنى (C_f) يقبل فرعاً شلجياً اتجاهه محور الأرتابب

مثال: نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة كالتالي :

$$f(x) = x^3 \text{ أحسب } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} \text{ وأول هندسيا النتيجة}$$

$$\text{الجواب : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$$

التأويل الهندسي : (C_f) يقبل فرعاً شلجياً اتجاهه محور

الأرتابب بجوار $+\infty$

3. فرع شلجي اتجاهه المستقيم ذو المعادلة $y = ax$ حيث $a \neq 0$:

$$\text{تعريف: إذا كانت : } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - ax = +\infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - ax = -\infty$$

نقول إن المنحنى (C_f) يقبل فرعاً شلجياً اتجاهه المستقيم ذي المعادلة

$$y = ax \text{ (نفس التعريف بجوار } -\infty \text{)}$$

مثال: نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة كالتالي :

$$f(x) = \sqrt{x} - x$$

1. حدد حيز تعريف الدالة f و أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

2. حدد طبيعة الفرع اللانهائي لمنحنى الدالة f

الجواب : (1) $D_f = \mathbb{R}^+$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} - x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x}(1 - \sqrt{x}) = -\infty$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x} - x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x}}{x} - 1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} - 1 = \frac{1}{+\infty} - 1 = -1 = a$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - ax = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - (-1)x = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) + x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty$$

2. بين أن المستقيم $x = \frac{1}{2}$ محور تماثل للمنحنى (C_f) الممثل للدالة f

الجواب:

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} / x - x^2 \geq 0\} \quad f(x) = \sqrt{x - x^2} \quad (1)$$

$$x = 1 \text{ أو } x = 0 \Leftrightarrow x(1 - x) = 0 \Leftrightarrow x - x^2 = 0$$

ومنه جدول الإشارة :

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$x - x^2$	$-$	0	$+$	$-$

ومنه : $D_f = [0, 1]$

$$x = a \text{ يعني } x = \frac{1}{2} \quad (2)$$

أ) نبين أنه : إذا كانت $x \in [0, 1]$ فإن $1 - x \in [0, 1]$ ؟؟؟

$$\Leftrightarrow 1 - 1 \leq 1 - x \leq 1 + 0 \Leftrightarrow -1 \leq -x \leq 0 \Leftrightarrow 0 \leq x \leq 1 \Leftrightarrow x \in [0, 1]$$

$$1 - x \in [0, 1] \Leftrightarrow 0 \leq 1 - x \leq 1 \Leftrightarrow$$

ب) نبين أن : $f(1 - x) = f(x)$ ؟؟؟؟

$$f(1 - x) = \sqrt{(1 - x) - (1 - x)^2} = \sqrt{1 - x - (1 - 2x + x^2)}$$

$$= \sqrt{1 - x - 1 + 2x - x^2} = \sqrt{x - x^2} = f(x)$$

ومنه $x = \frac{1}{2}$ محور تماثل منحنى الدالة f .

مثال 2 نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة كالتالي :

$$f(x) = \frac{x^2 - x}{x + 1}$$

$$1. \text{ بين أن } \forall x \in D_f \quad f(x) = x - 2 + \frac{2}{x + 1}$$

2. بين أن النقطة $\Omega(-1; -3)$ مركز تماثل منحنى الدالة f .

$$\text{الجواب : (1)} \quad x - 2 + \frac{2}{x + 1} = \frac{(x - 2)(x + 1) + 2}{x + 1} = \frac{x^2 - x}{x + 1} = f(x)$$

$$(2) \quad \Omega(a; b) \quad \Omega(-1; -3)$$

أ) نبين أنه : إذا كانت $x \in \mathbb{R} - \{-1\}$ فإن $-2 - x \in \mathbb{R} - \{-1\}$ ؟؟؟

$$\Leftrightarrow -2 - x \neq -2 + 1 \Leftrightarrow -x \neq 1 \Leftrightarrow x \neq -1 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R} - \{-1\}$$

$$-2 - x \in \mathbb{R} - \{-1\} \Leftrightarrow -2 - x \neq -1 \Leftrightarrow$$

ب) نبين أن : $f(-2 - x) + f(x) = -6 = 2b$ ؟؟؟؟

$$f(-4 - x) + f(x) = -4 - x - 1 + \frac{1}{-4 - x + 2} + x - 1 + \frac{1}{x + 2}$$

$$= -4 - 2 + \frac{1}{-x - 2} + \frac{1}{x + 2} = -6 + \frac{1}{x + 2} + \frac{1}{x + 2} = -6$$

ومنه $\Omega(-2; -3)$ مركز تماثل منحنى الدالة f .

تمرين 1: نعتبر الدالة f المعرفة كالتالي : $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 4x$

1. حدد D_f حيز تعريف الدالة f

2. أدرس زوجية الدالة f

3. أحسب نهايات الدالة f عند محددات D_f

4. أدرس الفروع اللانهائية لمنحنى الدالة f

5. أحسب مشتقة الدالة f و أدرس إشارتها

6. حدد جدول تغيرات الدالة f

7. حدد معادلة لمماس المنحنى (C_f) الممثل للدالة f في

النقطة A التي أفصولها $x_0 = -1$

8. حدد نقط تقاطع المنحنى (C_f) الممثل للدالة مع محوري المعلم.

9. حدد مطايف الدالة f إذا وجدت

10. أرسم المنحنى (C_f) الممثل للدالة f في معلم متعامد ممنظم

أجوبة: $D_f = \mathbb{R} \quad f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 4x$ لأنها دالة حدودية

(أ) إذا كانت $x \in \mathbb{R}$ فإن $-x \in \mathbb{R}$

$$f(-x) = \frac{1}{3}(-x)^3 - 4(-x) = -\frac{1}{3}x^3 + 4x = -\left(\frac{1}{3}x^3 - 4x\right) = -f(x)$$

ومنه f دالة فردية

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty \quad (3)$$

لأن نهاية دالة حدودية عند ما لانهاية هي نهاية حدها الأكبر درجة

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{3}x^3}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{3}x^2 = +\infty \quad (4)$$

(C_f) يقبل فرعا شلجيا اتجاهه محور الأرتيب بجوار $+\infty$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{1}{3}x^3}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{3}x^2 = +\infty$$

(C_f) يقبل فرعا شلجيا اتجاهه محور الأرتيب بجوار $-\infty$

$$f'(x) = \left(\frac{1}{3}x^3 - 4x\right)' = \frac{1}{3} \times 3x^2 - 4 = x^2 - 4 \quad (5)$$

$$(x - 2)(x + 2) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow f'(x) = 0$$

$$x = -2 \text{ أو } x = 2 \Leftrightarrow$$

x	$-\infty$	-2	2	$+\infty$
$x^2 - 4$	$+$	0	$-$	$+$

(6)

x	$-\infty$	-2	2	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$+$
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow 16/3$	$\searrow -16/3$	$+\infty$

(7) معادلة لمماس ل (C_f) في النقطة A التي أفصولها $x_0 = -1$

$$f'(-1) = -3 \quad \text{و} \quad f(-1) = \frac{11}{3} \quad \text{و} \quad y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

$$y = -3x + \frac{2}{3} \Leftrightarrow y = \frac{11}{3} - 3(x + 1) \Leftrightarrow y = f(-1) + f'(-1)(x + 1)$$

(8) أ) نقط تقاطع (C_f) المنحنى الممثل للدالة f مع محور الأفاسيل

$$\text{نحل فقط المعادلة : } f(x) = 0 \text{ يعني } \frac{1}{3}x^3 - 4x = 0$$

$$\text{يعني } x\left(\frac{1}{3}x^2 - 4\right) = 0 \text{ يعني } x = 0 \text{ أو } \frac{1}{3}x^2 - 4 = 0$$

$$\text{يعني } x = 0 \text{ أو } x^2 = 12 \text{ يعني } x = \sqrt{12} \text{ أو } x = -\sqrt{12}$$

$$\text{يعني } x = 0 \text{ أو } x = 2\sqrt{3} \text{ أو } x = -2\sqrt{3}$$

ومنه نقط التقاطع هم : $A(2\sqrt{3}; 0)$ و $B(-2\sqrt{3}; 0)$ و $O(0; 0)$

ب) نقط تقاطع (C_f) المنحنى الممثل للدالة f مع محور الأرتيب

نحسب فقط : $f(0) = 0$ لدينا $f(0) = 0$ ومنه نقطة التقاطع هي : $O(0; 0)$

$$(9) \quad f(2) = -\frac{16}{3} \text{ هي قيمة دنيا للدالة } f$$

$$f(-2) = \frac{16}{3} \text{ هي قيمة قصوى للدالة } f$$

(9) التمثيل المبياني للدالة f

يعني المستقيم ذا المعادلة $x = -1$ مقارب عمودي للمنحنى.

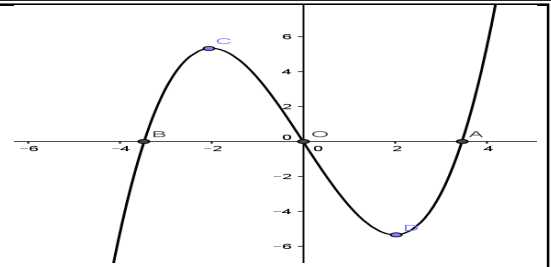
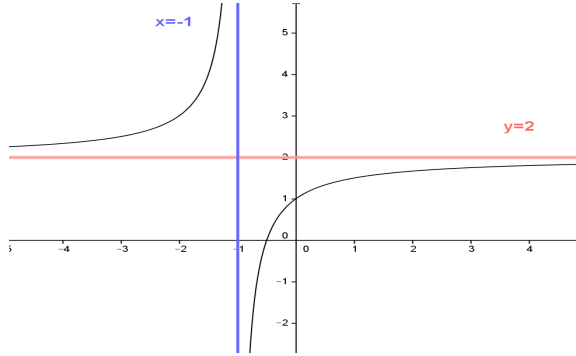
$$g'(x) = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}{(x+1)^2} = \frac{1}{(x+1)^2} \quad (3) \text{ لكل } x \text{ من } D \text{ لدينا:}$$

يعني: $(\forall x \in D) g'(x) > 0$

(4) جدول تغيرات الدالة

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	+		+
$f(x)$	↗		↗

منحنى الدالة g .



تمرين 2: نعتبر الدالة العددية g المعرفة ب: $g(x) = \frac{2x+1}{x+1}$

- حدد حيز تعريف الدالة g .
- أحسب نهايات الدالة g في محددات حيز التعريف و أول النتائج هندسياً.
- أحسب الدالة المشتقة. ثم ضع جدول تغيرات الدالة g .
- أنشئ منحنى الدالة g .

الحل:

(1) حيز تعريف الدالة g هو:

$$D = \{x \in \mathbb{R} / x+1 \neq 0\} = \mathbb{R} - \{-1\}$$

و منه $D =]-\infty, -1[\cup]-1, +\infty[$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x+1}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{x} = 2 \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x+1}{x+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{x} = 2 \quad (2)$$

يعني المستقيم ذا المعادلة $y = 2$ مقارب أفقي للمنحنى (C_f) .

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{2x+1}{x+1} = +\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow -1^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{2x+1}{x+1} = -\infty$$

تمرين 3: نعتبر الدالة f المعرفة كالتالي :

$$f(x) = \sqrt{4x^2 + 2x - 2}$$

1. حدد D_f و حدد $f'(x)$

2. أحسب : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

3. بين : $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = -2$ و أحسب : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) + 2x$

4. أستنتج معادلة المقارب المائل لمنحنى الدالة f بجوار $-\infty$

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} / 4x^2 + 2x - 2 \geq 0\} \quad (1) \quad \text{أجوبة:}$$

$$2x^2 + x - 1 = 0 \Leftrightarrow 4x^2 + 2x - 2 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (1)^2 - 4 \times 2 \times (-1) = 1 + 8 = 9 = (3)^2 > 0$$

بما أن $\Delta > 0$ فإن هذه الحدودية لها جذرين هما:

$$x_1 = \frac{-1+3}{2 \times 2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \quad \text{و} \quad x_2 = \frac{-4}{4} = -1 \quad \text{ومنه جدول الاشارة:}$$

x	$-\infty$	-1	1/2	$+\infty$
$4x^2+2x-2$	+	0	-	+

$$\text{ومنه: } D_f =]-\infty, -1[\cup \left[\frac{1}{2}, +\infty[$$

$$\forall x \in]-\infty, -1[\cup \left[\frac{1}{2}, +\infty[$$

$$f'(x) = \left(\sqrt{4x^2 + 2x - 2} \right)' = \frac{(4x^2 + 2x - 2)'}{2\sqrt{4x^2 + 2x - 2}} = \frac{8x + 2}{2\sqrt{4x^2 + 2x - 2}} = \frac{4x + 1}{\sqrt{4x^2 + 2x - 2}}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{4x^2 + 2x - 2} \quad (2)$$

$$\text{لدينا: } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty \quad \text{ومنه} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} 4x^2 + 2x - 2 = \lim_{x \rightarrow -\infty} 4x^2 = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{4x^2 + 2x - 2}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 \left(4 + \frac{2x}{x^2} - \frac{2}{x^2} \right)}}{x} \quad (3)$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x| \sqrt{4 + \frac{2}{x} - \frac{2}{x^2}}}{x}$$

لدينا: $x \rightarrow -\infty$ ومنه: $|x| = -x$ ومنه

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x \sqrt{4 + \frac{2}{x} - \frac{2}{x^2}}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} -\sqrt{4 + \frac{2}{x} - \frac{2}{x^2}} = -\sqrt{4} = -2 = a$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) + 2x = \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{4x^2 + 2x - 2} + 2x = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(\sqrt{4x^2 + 2x - 2} + 2x)(\sqrt{4x^2 + 2x - 2} - 2x)}{(\sqrt{4x^2 + 2x - 2} - 2x)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x^2 + 2x - 2 - 4x^2}{\sqrt{4x^2 + 2x - 2} - 2x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x - 2}{\sqrt{4x^2 + 2x - 2} - 2x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x - 2}{-x \sqrt{4 + \frac{2}{x} - \frac{2}{x^2}} - 2x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x \left(2 - \frac{2}{x} \right)}{-x \left(\sqrt{4 + \frac{2}{x} - \frac{2}{x^2}} + 2 \right)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2 - \frac{2}{x}}{-\left(\sqrt{4 + \frac{2}{x} - \frac{2}{x^2}} + 2 \right)} = \frac{2}{-4} = -\frac{1}{2} = b$$

(4) ومنه: $y = ax + b$ أي $y = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$ مقارب مائل لمنحنى الدالة f

بجوار $-\infty$