

السنة 1 بكالوريا علوم تجريبية	نهاية دالة عددية حلول مقترحة	سلسلة 1
تمرين 1 :		
$\lim_{x \rightarrow \sqrt{2}} 2x^2 + \sqrt{2}x + 1 = 2 \times 2 + \sqrt{2} \times \sqrt{2} + 1 = 7$	$\lim_{x \rightarrow 1} 3x^2 - x + 3 = 3 - 1 + 3 = 5$	
$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{5x+1}{x^2+2x} = \frac{6}{3} = 2$	$\lim_{x \rightarrow -1} (x+1)(x^2+4x-3) = 0 \times (-6) = 0$	
$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{1}{x} + 5x = +\infty$ $+\infty + 0 \rightarrow +\infty$	$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{1}{x^3} = -\infty$	$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{1}{x^3} = +\infty$ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$
تمرين 2 :		
$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^2+13} = 0$ $\left(\frac{1}{+\infty} \rightarrow 0\right)$	$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 + 100 = -\infty$	$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^4 = +\infty$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$
$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 + \frac{1}{x} = +\infty$ $\left(\frac{1}{-\infty} \rightarrow 0 ; +\infty + 0 \rightarrow +\infty\right)$	$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x^2-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x+1} = \frac{1}{2}$	
$\lim_{x \rightarrow +\infty} 3\sqrt{x} = +\infty$	$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-3}{x^2} = 0$	$\lim_{x \rightarrow -\infty} -3x^7 = +\infty$ $(-3 \times (-\infty) \rightarrow +\infty)$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} 6x^4 = +\infty$
$\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x+1)^2 = +\infty \quad (+\infty \times +\infty \rightarrow +\infty)$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5}{\sqrt{x}} = 0$	
تمرين 3 : احسب النهايات التالية :		
$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 - 2x - 1}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(3x+1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} 3x+1 = 4$	بعد التعويض حصلنا على شكل غير محدد لذلك أجرينا القسمة الإقليدية لـ $3x^2 - 2x - 1$ على $x-1$ فحصلنا على $3x+1$	
$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+2}}{x} = \frac{\sqrt{4}}{2} = 1$	$\lim_{x \rightarrow -1} \sqrt{2x^2+3} = \sqrt{5}$	
$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 2x^2 + x - 2}{x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2(x-2) + x - 2}{(x-2)(x+2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x^2+1)}{(x-2)(x+2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2+1}{x+2} = \frac{5}{4}$	عندما نحصل على شكل غير محدد نبحث عن التعميل وقد ننجز قسمة إقليدية من أجل ذلك	
$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4-x} - \sqrt{4+x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{4-x} - \sqrt{4+x})(\sqrt{4-x} + \sqrt{4+x})}{x(\sqrt{4-x} + \sqrt{4+x})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(4-x) - (4+x)}{x(\sqrt{4-x} + \sqrt{4+x})}$ $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4-x-4-x}{x(\sqrt{4-x} + \sqrt{4+x})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2x}{x(\sqrt{4-x} + \sqrt{4+x})}$ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4-x} - \sqrt{4+x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2}{\sqrt{4-x} + \sqrt{4+x}} = \frac{-2}{2+2} = \frac{-1}{2}$	استعملنا المرافق للتخلص من الشكل غير المحدد	

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} \frac{x-1}{\sqrt{x}-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(\sqrt{x}+1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{x}+1 = 2$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{\sqrt{x}}{x} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{\sqrt{x} \times \sqrt{x}}{x \times \sqrt{x}} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{x}{x\sqrt{x}} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} \frac{x-1}{x^2-1} = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} \frac{x-1}{(x-1)(x+1)} = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} \frac{1}{x+1} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow -3} \frac{3x+1}{(x+2)^2} = \frac{-9+1}{(-1)^2} = -8$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x < 2}} \frac{x-3}{x-2} = +\infty \left(\frac{-1}{0^-} \rightarrow +\infty \right) , \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} \frac{x-3}{x-2} = -\infty \left(\frac{-1}{0^+} \rightarrow -\infty \right)$$

في هذا السؤال وجب علينا فصل النهاية إلى نهايتين لأننا نحتاج إشارة المقام حتى نحدد النهاية الصحيحة

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} \frac{3x}{1-x^2} = +\infty \left(\frac{3}{0^+} \rightarrow +\infty \right) , \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} \frac{3x}{1-x^2} = -\infty \left(\frac{3}{0^-} \rightarrow -\infty \right)$$

رغم أننا في النهاية $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} \frac{3x}{1-x^2}$ نحسب النهاية على اليمين، فذلك لا يعني أن $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} 1-x^2 = 0^+$ بل العكس

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} 1-x^2 = 0^- \text{ لأن من يحدد الإشارة هو التأطير، بمعنى: } x > 1 \Rightarrow x^2 > 1 \Rightarrow 1-x^2 < 0$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} \frac{7}{1-x} + \frac{2}{x+1} = +\infty \quad (+\infty + 1 \rightarrow +\infty) , \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} \frac{7}{1-x} + \frac{2}{x+1} = -\infty \quad (-\infty + 1 \rightarrow -\infty)$$

تمرين 4 :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (1-x+3x^2) = \lim_{x \rightarrow -\infty} 3x^2 = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (5x^2 - 2x + 3) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 5x^2 = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} |x^3| + x = \lim_{x \rightarrow -\infty} -x^3 + x = \lim_{x \rightarrow -\infty} -x^3 = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (1-x)(3x^2+3) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 3x^2 + 3 - 3x^3 - 3x$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (1-x)(3x^2+3) = \lim_{x \rightarrow +\infty} -3x^3 = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x+2x^3}{3x^3+2x^2+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3}{3x^3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5x^2+x+1}{x+2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5x^2}{x} \lim_{x \rightarrow -\infty} 5x = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2+x}{7x^3+x+1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2}{7x^3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{7x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x^3+5x^2}{x^2+1} + \frac{x^2-1}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x(-x^3+5x^2) + (x^2-1)(x^2+1)}{x(x^2+1)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x^4+5x^3+x^4-1}{x(x^2+1)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x^3-1}{x^3+x}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x^3+5x^2}{x^2+1} + \frac{x^2-1}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x^3}{x^3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 5 = 5$$

للتذكير: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_0} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{a_n x^n}{b_m x^m}$ و $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0 = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} a_n x^n$