أكاديمية الجهة الشرقية نيابة وجدة	مـادة الـريـاضيات	المستوى : الأولى باك علوم تجريبية الأستاذ : عثماني نجيب مـذكـرة رقـم 7/

مذكرة رقم 7 في درس النهايات

الأهداف و القدرات المنتظرة من الدرس :

محتوى البرنامج	القدرات المنتظرة	توجيهات تربوية
ـ نهايات الدوال $x \to x^2$ و $x \to \sqrt{x}$ و $x \to x^3$ و $x \to x^n$ ونهايات مقلوبات هذه الدوال في الصفر و $+\infty$ و $-\infty$؛ ـ النهاية المنتهية والنهاية اللامنتهية في نقطة ـ النهاية المنتهية والنهاية اللامنتهية في $+\infty$ و $-\infty$؛ ـ العمليات على النهايات؛ ـ النهاية على اليمين؛ النهاية على اليسار؛ ـ نهايات الدوال الحدودية والدوال الجذرية؛ نهاية دوال من الشكل: $\sqrt{f}$ حيث f دالة اعتيادية؛ ـ النهايات $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{x}$ و $\lim\limits_{x\to0}\frac{\tan x}{x}$ و $\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^2}$؛ $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin ax}{x}$؛ ـ النهايات و الترتيب؛	ـ حساب نهايات الدوال الحدودية والدوال الجذرية والدوال اللاجذرية؛ ـ حساب نهايات الدوال المثلثية البسيطة باستعمال النهايات الاعتيادية.	ـ يتم تقديم مفهوم النهاية بطريقة حدسية من خلال سلوك الدوال المرجعية المحددة في البرنامج ومقلوباتها بجوار الصفر و $+\infty$ و $-\infty$ وقبول هذه النهايات؛ ـ يتم الاعتماد على خاصيات الترتيب في IR لحساب نهايات دوال بسيطة تحقق: * $\|f(x)-l\| \le u(x)$ حيث u دالة نهايتها 0؛ * $f(x) \ge u(x)$ حيث u دالة نهايتها $+\infty$؛ * $f(x) \le u(x)$ حيث u دالة نهايتها $-\infty$؛ ـ تعتبر العمليات على النهايات المنتهية واللامنتهية مقبولة وينبغي تعويد التلاميذ على الاستعمال الصحيح لها. ـ ينبغي تعويد التلاميذ على إزالة الأشكال غير المحددة البسيطة. ـ إن أي دراسة نظرية لمفهوم النهاية تعتبر خارج المقرر.

I. نهاية منتهية لدالة نقطة

مثال1: لتكن f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ كالتالي: $f(x)=2x$

الكتابة : $\lim\limits_{x\to0} f(x)$ تقرأ النهاية عندما يؤول x إلى 0 ل $f(x)$

و لدينا $\lim\limits_{x\to0} f(x)=\lim\limits_{x\to0} 2x=0$

نهايات اعتيادية: • $\lim\limits_{x\to0} x=0$ • $\lim\limits_{x\to0} x^2=0$

• $\lim\limits_{x\to0} x^3=0$ • $\lim\limits_{x\to0} x^n=0$ $\forall n\in\mathbb{N}^*$

تمرين1: أحسب النهايات التالية :

1) $\lim\limits_{x\to-1}(3+x-3x^2)$ 2) $\lim\limits_{x\to1}\frac{5x-1}{3x^2-x}$

أجوبة1: $\lim\limits_{x\to-1} 3+x-3x^2=3+(-1)-3(-1)^2=3+(-1)-3=-1=l$

2) $\lim\limits_{x\to1}\frac{5x-1}{3x^2-x}=\frac{5\times1-1}{3(-1)^2-(-1)}=\frac{4}{3+1}=1=l$

II. نهاية غير منتهية لدالة عند $+\infty$ أو $-\infty$

لتكن f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ كالتالي: $f(x)=x^2$

املأ الجدول التالي :

x	10000	100	10	1	0	-1	-10	-1000	-10000
$f(x)$									

نلاحظ أنه عندما تكبر x فان $f(x)$ تكبر أيضا نكتب : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

نلاحظ أنه عندما تصغر x فان $f(x)$ تكبر ونكتب : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$

نهايات اعتيادية: • $\lim\limits_{x\to+\infty} x=+\infty$ • $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2=+\infty$ • $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3=+\infty$

• $\lim\limits_{x\to+\infty} x^n=+\infty$ $\forall n\in\mathbb{N}^*$ • $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2=+\infty$ $\lim\limits_{x\to-\infty} x=-\infty$

• $\lim\limits_{x\to-\infty} x^3=-\infty$ • إذا كان n زوجي $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n=+\infty$ • $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n=-\infty$

إذا كان n فردي

تمرين2: أحسب النهايات التالية: 1) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^6$ 2) $\lim\limits_{x\to-\infty} x^{2014}$

3) $\lim\limits_{x\to-\infty} x^{2015}$ 4) $\lim\limits_{x\to-\infty} -7x^9$

أجوبة1: $\lim\limits_{x\to+\infty} x^6=+\infty$ 2) $\lim\limits_{x\to-\infty} x^{2014}=+\infty$

3) $\lim\limits_{x\to-\infty} x^{2015}=-\infty$ 4) $\lim\limits_{x\to-} -7x^9=+\infty$

III. نهاية منتهية لدالة عند $+\infty$ أو $-\infty$

لتكن f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ كالتالي: $f(x)=\frac{1}{x}$

املأ الجدول التالي :

x	10000	100	10	1	0	-1	-10	-1000	-10000
$f(x)$									

نلاحظ أنه عندما تكبر x فان $f(x)$ تقترب من الصفر

و نكتب : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0^+$

نلاحظ أنه عندما تصغر x فان $f(x)$ تقترب من الصفر

نكتب : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0^-$

نهايات اعتيادية: • $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0^+$ • $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0^-$

• $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x^n}=0$ $\forall n\in\mathbb{N}^*$ • $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x^n}=0$ $\forall n\in\mathbb{N}^*$

خاصية : لتكن f دالة عددية و l عدد حقيقيا

إذا كانت f تقبل نهاية l في $+\infty$ (أو في $-\infty$) فان هده النهاية وحيدة.

تمرين3: أحسب النهايات التالية : 1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x^3}$ 2) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x^5}$

3) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{5}{x^7}$ 4) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-4}{x^5}$ 5) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{12}{x^{2009}}$

الأجوبة : 1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x^3}=0^+$ 2) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x^5}=0^-$

3) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{5}{x^7}=0^-$ 4) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-4}{x^5}=0^-$ 5) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{12}{x^{2009}}=0^+$

IV. النهاية اللانهائية لدالة في نقطة

نهايات اعتيادية: • $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{1}{x}=+\infty$ وتقرأ النهاية عندما يؤول x إلى **0** على اليمين

• $\lim\limits_{x\to0^-}\frac{1}{x}=-\infty$ وتقرأ النهاية عندما يؤول x إلى 0 على اليسار

تمرين4: أحسب النهايات التالية: 1) $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{1}{x^3}$ 2) $\lim\limits_{x\to0^-}\frac{-5}{x^3}$ 3) $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{9}{x^5}$

4) $\lim\limits_{x\to0^-}\frac{-12}{x^4}$ 5) $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{-1}{\sqrt{x}}$ 6) $\lim\limits_{x\to0^+}3x+7+\frac{1}{\sqrt{x}}$

الأجوبة : 1) $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{1}{x^3}=+\infty$ 2) $\lim\limits_{x\to0^-}\frac{-5}{x^3}=-\infty$ 3) $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{9}{x^5}+\infty$

4) $\lim\limits_{x\to0^-}\frac{-12}{x^4}=-\infty$ 5) $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{-1}{\sqrt{x}}=-\infty$ 6) $\lim\limits_{x\to0^+}3x+7+\frac{1}{\sqrt{x}}=0+7+\infty=+\infty$

V. النهاية على اليمين والنهاية على اليسار لدالة في نقطة

■ إذا كانت $f(x)$ يؤول إلى l عندما يؤول x إلى a على اليمين

فإننا نكتب : " $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=l$ " أو " $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}}f(x)=l$ "

■ إذا كانت $f(x)$ يؤول إلى l عندما يؤول x إلى a على اليسار

فإننا نكتب : " $\lim\limits_{x\to a^-}f(x)=l$ " أو " $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x<a}}f(x)=l$ "

نهايات اعتيادية: • $\lim\limits_{\substack{x\to0\\ x>0}}\frac{1}{x}=+\infty$ • $\lim\limits_{\substack{x\to0\\ x<0}}\frac{1}{x}=-\infty$

$\lim\limits_{\substack{x\to0\\ x>0}}\frac{1}{x^n}=+\infty$ $\forall n\in\mathbb{N}^*$ • $\lim\limits_{\substack{x\to0\\ x>0}}\sqrt{x}=0$ • $\lim\limits_{\substack{x\to0\\ x>0}}\frac{1}{\sqrt{x}}=+\infty$

• إذا كان n زوجي غير منعدم , فان $\lim\limits_{\substack{x\to0\\ x<0}}\frac{1}{x^n}=+\infty$

• إذا كان n فردي غير منعدم , فان $\lim\limits_{\substack{x\to0\\ x<0}}\frac{1}{x^n}=-\infty$

مثال: أحسب النهايات التالية: 1) $\lim\limits_{x\to3^+}\frac{3x+1}{2x-6}$ 2) $\lim\limits_{x\to3^-}\frac{3x+1}{2x-6}$

أجوبة : $\lim\limits_{x\to3^+}3x+1=9+1=10$ و $\lim\limits_{x\to3^+}2x-6=0$

x	$-\infty$ 3 $+\infty$
$2x-6$	$-$ 0 $+$

ومنه : $\lim\limits_{x\to3^+}2x-6=0^+$ و بالتالي : $\lim\limits_{x\to3^+}\frac{3x+1}{2x-6}=+\infty$

2) $\lim\limits_{x\to3^-}2x-6=0^-$ و بالتالي : $\lim\limits_{x\to3^-}\frac{3x+1}{2x-6}=-\infty$

تمرين5: أحسب النهايات التالية: 1) $\lim\limits_{x\to2^+}\frac{3x-8}{2x-4}$ و $\lim\limits_{x\to2^-}\frac{3x-8}{2x-4}$

2) $\lim\limits_{x\to3^+}\frac{x-4}{-2x+6}$ و $\lim\limits_{x\to3^-}\frac{x-4}{-2x+6}$ 3) $\lim\limits_{x\to1^+}\frac{x-9}{-2x^2+3x-1}$ و $\lim\limits_{x\to1^-}\frac{x-9}{-2x^2+3x-1}$

4) $\lim\limits_{x\to-2^\pm}\frac{-5x^2+1}{x+2}$ 5) $\lim\limits_{x\to2^\pm}\frac{5x-20}{-2x+4}$

أجوبة : 1) $\lim\limits_{x\to2^+}3x-8=-2$ و $\lim\limits_{x\to2^+}2x-4=0$

x	$-\infty$ 2 $+\infty$
$2x-4$	$-$ 0 $+$

ومنه : $\lim\limits_{x\to2^+}2x-4=0^+$ **و بالتالي :** $\lim\limits_{x\to2^+}\frac{3x-8}{2x-4}=-\infty$

$\lim\limits_{x\to2^-}2x-4=0^-$ **و بالتالي :** $\lim\limits_{x\to2^+}\frac{3x-8}{2x-4}=+\infty$

2) $\lim\limits_{x\to3^+}x-4=-1$ و $\lim\limits_{x\to3^+}-2x+6=0$

x	$-\infty$ 3 $+\infty$
$-2x+6$	$+$ 0 $-$

ومنه : $\lim\limits_{x\to3^+}-2x+6=0^-$ و بالتالي : $\lim\limits_{x\to3^+}\frac{x-4}{-2x+6}=+\infty$

$\lim\limits_{x\to3^-}-2x+6=0^+$ و بالتالي : $\lim\limits_{x\to3^-}\frac{x-4}{-2x+6}=-\infty$

3) $\lim\limits_{x\to1^+}\frac{x-9}{-2x^2+3x-1}=+\infty$

$\lim\limits_{x\to1^+}x-9=-8$ و $\lim\limits_{x\to1^+}-2x^2+3x-1=0$

ندرس اشارة $-2x^2+3x-1$

نلاحظ أن : 1 جذر للحدودية $-2x^2+3x-1$

اذن : هي تقبل القسمة على $x-1$

وباستعمال تقنية القسمة الاقليدية

نجد أن : $-2x^2+3x-1=(x-1)(-2x+1)$

ومنه: $-2x^2+3x-1=0$ يعني $(x-1)(-2x+1)=0$ يعني $x=\frac{1}{2}$ أو $x=1$

x	$-\infty$	1/2		1	$+\infty$
$-2x^2+3x-1$	$-$	0	$+$	0	$-$

ومنه : $\lim\limits_{x\to1^+}\frac{x-9}{-2x^2+3x-1}=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to1^-}\frac{x-9}{-2x^2+3x-1}=-\infty$

4) $\lim\limits_{x\to-2^\pm}\frac{-5x^2+1}{x+2}$ **لدينا** $\lim\limits_{x\to-2^+}-5x^2+1=-19$ و $\lim\limits_{x\to-2^+}x+2=0$

x	$-\infty$ -2 $+\infty$
$x+2$	$-$ 0 $+$

ومنه : $\lim\limits_{x\to-2^+}\frac{-5x^2+1}{x+2}=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to-2^-}\frac{-5x^2+1}{x+2}=+\infty$

5) **لدينا** $\lim\limits_{x\to2^+}5x-20=-10$ و $\lim\limits_{x\to2^+}-2x+4=0$

x	$-\infty$ 2 $+\infty$
$-2x+4$	$+$ 0 $-$

ومنه : $\lim\limits_{x\to2^+}\frac{5x-20}{-2x+4}=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to2^-}\frac{5x-20}{-2x+4}=-\infty$

VI. العمليات على النهايات

في كل ما يلي a عدد حقيقي أو يساوي $+\infty$ أو $-\infty$ و l و l' عددان حقيقيانو هذه العمليات تبقى صالحة على اليمين و اليسار

1. النهاية و الجمع:

$\lim\limits_{x\to a}f(x)$	l	l	l	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim\limits_{x\to a}g(x)$	l'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to a}(f+g)(x)$	$l'+l$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	شكل غير محدد	

مثال: أحسب النهايات التالية : $\lim\limits_{x\to0^+}3x+7+\frac{1}{\sqrt{x}}$

الأستاذ : عثماني نجيب

الجواب : $\lim_{x\to0^+}3x=0$ و $\lim_{x\to0^+}7=7$ و $\lim_{x\to0^+}\frac{1}{\sqrt{x}}=+\infty$ **ومنه:**

$$\lim_{x\to0^+}3x+7+\frac{1}{\sqrt{x}}=+\infty$$

2. النهاية و الضرب:

$\lim_{x\to a}f(x)$	l	$l\succ0$	$l\prec0$	$l\succ0$	$l\prec0$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	0	$+\infty$	$-\infty$
$\lim_{x\to a}g(x)$	l'	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$ أو $+\infty$	0	
$\lim_{x\to a}(fg)(x)$	$l'.l$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	شكل غير محدد		

<u>أمثلة:</u> أحسب النهايات التالية : 1) $\lim_{x\to+\infty}5x^4$ و **2)** $\lim_{x\to+\infty}x^2-x$

3) $\lim_{x\to-\infty}\left(x^2-1\right)^{2008}\times\left(x^3+1\right)^{2009}$ **4)** $\lim_{x\to-\infty}\left(x^2+1\right)\times\frac{1}{x}$ **5)** $\lim_{x\to+\infty}\left(x-\sqrt{x}\right)$

أجوبة 1): $\lim_{x\to+\infty}5x^4=5\times(+\infty)=+\infty$

2) $\lim_{x\to+\infty}x^2-x=+\infty-\infty$ نحصل عن شكل غ محدد من قبيل : $+\infty-\infty$

نرفع ال ش غ م مثلا بالتعميل : $\lim_{x\to+\infty}x^2-x=\lim_{x\to+\infty}x(x-1)$ **لدينا :** $\lim_{x\to+\infty}x=+\infty$ و

$\lim_{x\to+\infty}x-1=+\infty$

ومنه : $\lim_{x\to+\infty}x^2-x=+\infty$

3) $\lim_{x\to-\infty}\left(x^2-1\right)^{2008}=+\infty$ و $\lim_{x\to-\infty}\left(x^3+1\right)^{2009}=-\infty$ **ومنه:** $\lim_{x\to-\infty}\left(x^2-1\right)^{2008}\times\left(x^3+1\right)^{2009}=-\infty$

4) $\lim_{x\to-\infty}\left(x^2+1\right)=+\infty$ و $\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0^-$ نحصل عن شكل غ محدد من قبيل :

$\infty\times0$

نرفع ال ش غ م مثلا بالنشر : $\lim_{x\to-\infty}\left(x^2+1\right)\times\frac{1}{x}=\lim_{x\to-\infty}x+\frac{1}{x}=-\infty+0=-\infty$

5) $\lim_{x\to+\infty}x=+\infty$ و $\lim_{x\to+\infty}-\sqrt{x}=-\infty$ نحصل عن شكل غ محدد من قبيل :

$+\infty-\infty$

نرفع ال ش غ م مثلا بالتعميل : $\lim_{x\to+\infty}\left(x-\sqrt{x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-1\right)=+\infty$

3. النهاية و المقلوب:

$\lim_{x\to a}g(x)$	$l'\in\mathbb{R}^*$	$+\infty$	$-\infty$	0^+	0^-
$\lim_{x\to a}\left(\frac{1}{g}\right)(x)$	$\frac{1}{l'}$	0	0	$+\infty$	$-\infty$

<u>أمثلة:</u> أحسب النهايات التالية : $\lim_{x\to0^+}\frac{1}{3x+7}+\frac{1}{\sqrt{x}}$ و $\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x+7}+\frac{1}{x^2}$ و $\lim_{x\to0}\frac{1}{|x|}$

أجوبة 1): لدينا : $\lim_{x\to0^+}\frac{1}{3x+7}=\frac{1}{7}$ و $\lim_{x\to0^+}\frac{1}{\sqrt{x}}=+\infty$

ومنه : $\lim_{x\to0^+}\frac{1}{3x+7}+\frac{1}{\sqrt{x}}=+\infty$

2) $\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x+7}=0$ و $\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x^2}=0$ **ومنه :** $\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x+7}+\frac{1}{x^2}=0$

3) $\lim_{x\to0}|x|=0^+$ **ومنه :** $\lim_{x\to0}\frac{1}{|x|}=+\infty$

4. النهاية و الخارج:

$\lim_{x\to a}f(x)$	l	l	$-\infty$	∞	∞	$-\infty$ $l\prec0$	$+\infty$ $\succ0$	$+\infty$ $l\succ0$	$-\infty$ $\prec0$	$-\infty$	.	$-\infty$ $+\infty$
$\lim_{x\to a}g(x)$	$\neq0$	∞	0	0	0	0^+	0^+	0^-	0^-	0	.	$-\infty$ $+\infty$
$\lim_{x\to a}\left(\frac{f}{g}\right)(x)$	$\frac{l}{l'}$	.	∞	∞	∞	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	∞	شكل غير محدد	

<u>أمثلة:</u> أحسب النهايات التالية :1) $\lim_{x\to1}\frac{4x-5}{|x-4|}$ **2)** $\lim_{x\to2}\frac{x^2-4}{x-2}$

أجوبة 1): لدينا : $\lim_{x\to1}4x-5=-1$ و $\lim_{x\to1}|x-4|=3$

ومنه : $\lim_{x\to1}\frac{4x-5}{|x-4|}=-\frac{1}{3}$

2) $\lim_{x\to2}\frac{x^2-4}{x-2}$ **لدينا :** $\lim_{x\to2}x^2-4=0$ و $\lim_{x\to2}x-2=0$

نحصل عن شكل غ محدد من قبيل : $\frac{0}{0}$

$$\lim_{x\to2}\frac{x^2-4}{x-2}=\lim_{x\to2}\frac{x^2-2^2}{x-2}=\lim_{x\to2}\frac{(x-2)(x+2)}{x-2}=\lim_{x\to2}x+2=4$$

<u>تمرين6:</u> أحسب النهايات التالية :1) $\lim_{x\to3}\frac{x^2-9}{x-9}$ **2)** $\lim_{x\to\frac{1}{2}}\frac{4x^2-1}{2x-1}$

3) $\lim_{x\to3}\frac{x-3}{x^2-2x-3}$ 4) $\lim_{x\to1}\frac{2x^2-5x+3}{x^2+2x-3}$ 5) $\lim_{x\to2}\frac{3x^2-5x-2}{2x^2-5x+2}$

6) $\lim_{x\to1}\frac{2x^3+x^2-3}{2x^2+x-3}$ 7) $\lim_{x\to2}\frac{x^4-16}{x-2}$ 8) $\lim_{x\to0}\frac{-9}{\sqrt{x}}$

<u>أجوبة :</u> 1) $\lim_{x\to3}\frac{x^2-9}{x-3}$ لدينا : $\lim_{x\to3}x^2-9=0$ و $\lim_{x\to3}x-3=0$

نحصل عن شكل غ محدد من قبيل : $\frac{0}{0}$

نتخلص من ال ش غ م مثلا بالتعميل ثم بالاختزال:

$$\lim_{x\to3}\frac{x^2-9}{x-3}=\lim_{x\to3}\frac{x^2-3^2}{x-3}=\lim_{x\to3}\frac{(x-3)(x+3)}{x-3}=\lim_{x\to3}x+3=6$$

2) $\lim_{x\to\frac{1}{2}}\frac{4x^2-1}{2x-1}$ لدينا : $\lim_{x\to\frac{1}{2}}4x^2-1=0$ و $\lim_{x\to\frac{1}{2}}2x-1=0$

نحصل عن شكل غ محدد من قبيل : $\frac{0}{0}$

نتخلص من ال ش غ م مثلا بالتعميل ثم بالاختزال:

$$\lim_{x\to\frac{1}{2}}\frac{4x^2-1}{2x-1}=\lim_{x\to\frac{1}{2}}\frac{(2x)^2-1^2}{2x-1}=\lim_{x\to\frac{1}{2}}\frac{(2x-1)(2x+1)}{2x-1}=\lim_{x\to\frac{1}{2}}2x+1=2$$

3) $\lim_{x\to3}\frac{x-3}{x^2-2x-3}$ لدينا : $\lim_{x\to3}x-3=0$ و $\lim_{x\to3}x^2-2x-3=0$

نحصل عن شكل غ محدد من قبيل : $\frac{0}{0}$

نتخلص من ال ش غ م مثلا بالتعميل ثم بالاختزال:

نلاحظ أن : 3 جذرللحدودية x^2-2x-3

اذن : هي تقبل القسمة على : $x-3$

وباستعمال تقنية القسمة الاقليدية نجد أن : $x^2-2x-3=(x-3)(x+1)$

$$\lim_{x\to3}\frac{x-3}{x^2-2x-3}=\lim_{x\to3}\frac{x-3}{(x-3)(x+1)}=\lim_{x\to3}\frac{1}{x+1}=\frac{1}{4}$$

4) $\lim_{x\to1}\frac{2x^2-5x+3}{x^2+2x-3}$ لدينا : $\lim_{x\to1}2x^2-5x+3=0$ و $\lim_{x\to1}x^2+2x-3=0$

نحصل عن شكل غ محدد من قبيل : $\frac{0}{0}$

نتخلص من ال ش غ م مثلا بالتعميل ثم بالاختزال:

نلاحظ أن : 1 جذرللحدودية $2x^2-5x+3$ و للحدودية x^2+2x-3

اذن : الحدوديتان تقبلان القسمة على : $x-1$

وباستعمال تقنية القسمة الاقليدية نجد أن : $2x^2-5x+3=(x-1)(2x-3)$

وأن : $x^2+2x-3=(x-1)(x+3)$

$$\lim_{x\to1}\frac{2x^2-5x+3}{x^2+2x-3}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(2x-3)}{(x-1)(x+3)}=\lim_{x\to1}\frac{2x-3}{x+3}=\frac{-1}{4}$$

5) $\lim_{x\to2}\frac{3x^2-5x-2}{2x^2-5x+2}$ لدينا : $\lim_{x\to2}3x^2-5x-2=0$ و $\lim_{x\to2}2x^2-5x+2=0$

نحصل عن شكل غ محدد من قبيل : $\frac{0}{0}$

نتخلص من ال ش غ م مثلا بالتعميل ثم بالاختزال:

نلاحظ أن : 2 جذرللحدودية $3x^2-5x-2$ و للحدودية $2x^2-5x+2$

اذن : الحدوديتان تقبلان القسمة على : $x-2$

وباستعمال تقنية القسمة الاقليدية نجد أن :

$3x^2-5x-2=(x-2)(3x+1)$ وأن : $2x^2-5x+2=(2x-1)(x-2)$

الأستاذ : عثماني نجيب

$$\lim_{x\to2}\frac{3x^2-5x-2}{2x^2-5x+2}=\lim_{x\to2}\frac{(x-2)(3x+1)}{(x-2)(2x-1)}=\lim_{x\to2}\frac{3x+1}{2x-1}=\frac{7}{3}$$

6) $\lim_{x\to1}\frac{2x^3+x^2-3}{2x^2+x-3}$: لدينا $\lim_{x\to1}2x^3+x^2-3=0$ و $\lim_{x\to1}2x^2+x-3=0$

نحصل عن شكل غ محدد من قبيل : $\frac{0}{0}$

نتخلص من ال ش غ م مثلا بالتعميل ثم بالاختزال:

نلاحظ أن : 1 جذر للحدودية $2x^3+x^2-3$ و للحدودية $2x^2+x-3$

اذن : الحدوديتان تقبلان القسمة على : $x-1$

وباستعمال تقنية القسمة الاقليدية نجد أن :

$2x^3+x^2-3=(x-1)(2x^2+3x+3)$ و أن : $2x^2+x-3=(x-1)(2x+3)$

$$\lim_{x\to1}\frac{2x^3+x^2-3}{2x^2+x-3}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(2x^2+3x+3)}{(x-1)(2x+3)}=\lim_{x\to1}\frac{2x^2+3x+3}{2x+3}=\frac{8}{5}$$

7) $\lim_{x\to2}\frac{x^4-16}{x-2}$: لدينا $\lim_{x\to2}x^4-16=0$ و $\lim_{x\to2}x-2=0$

نحصل عن شكل غ محدد من قبيل : $\frac{0}{0}$

نتخلص من ال ش غ م مثلا بالتعميل ثم بالاختزال:

$$\lim_{x\to2}\frac{x^4-16}{x-2}=\lim_{x\to2}\frac{x^4-2^4}{x-2}=\lim_{x\to2}\frac{(x^2)^2-(2^2)^2}{x-2}=\lim_{x\to2}\frac{(x^2-2^2)(x^2+2^2)}{x-2}$$

$$=\lim_{x\to2}\frac{(x-2)(x+2)(x^2+4)}{x-2}=\lim_{x\to2}(x+2)(x^2+4)=32$$

8) $\lim_{x\to0}-\frac{9}{\sqrt{x}}=-\infty$ لأن : $\lim_{x\to0}\sqrt{x}=0^+$

5. نهاية الدالة الحدودية

نهاية دالة حدودية عندما تؤول x إلى $+\infty$ أو إلى $-\infty$ هي نهاية حدها الأكبر درجة

مثال : $\lim_{x\to+\infty}3x^2+5x-4$

الجواب: $\lim_{x\to+\infty}3x^2+5x-4=\lim_{x\to+\infty}3x^2=+\infty$

6. نهاية الدالة الجذرية

نهاية دالة جذرية عندما تؤول x إلى $+\infty$ أو إلى $-\infty$ هي خارج نهاية حديها الأكبر درجة.

مثال : $\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^6-x^2+1}{x^4+x-4}$

الجواب: $\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^6-x^2+1}{x^4+x-4}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^6}{x^4}=\lim_{x\to+\infty}2x^{6-4}=\lim_{x\to+\infty}2x^2=+\infty$

تمرين7: أحسب النهايات التالية : 1) $\lim_{x\to+\infty}1+5x-9x^2$

2) $\lim_{x\to-\infty}\left(-5x^3-4x+12\right)$ 3) $\lim_{x\to+\infty}\frac{5x^5+3x^2+x}{-10x^5-x-1}$

4) $\lim_{x\to-\infty}\frac{-3x^6+2x^2+1}{x^3+3x-1}$ 5) $\lim_{x\to-\infty}\frac{20x^3-7x^2+x}{10x^4-3x-6}$

6) $\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^5+4x^2+1}{x^8-x+3}$ 7) $\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^2+1}{(x-1)^2}$

أجوبة : 1) $\lim_{x\to+\infty}1+5x-9x^2=\lim_{x\to+\infty}-9x^2=-\infty$

2) $\lim_{x\to-\infty}-5x^3-4x+12=\lim_{x\to-\infty}-5x^3=+\infty$

3) $\lim_{x\to+\infty}\frac{5x^5+3x^2+x}{-10x^5-x-1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{5x^5}{-10x^5}=-\frac{5}{10}=-\frac{1}{2}$

4) $\lim_{x\to-\infty}\frac{-3x^6+2x^2+1}{x^3+3x-1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-3x^6}{x^3}=\lim_{x\to-\infty}-3x^3=+\infty$

5) $\lim_{x\to-\infty}\frac{20x^3-7x^2+x}{10x^4-3x-6}=\lim_{x\to-\infty}\frac{20x^3}{10x^4}=\lim_{x\to-\infty}\frac{20}{10x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2}{x}=0^-$

6) $\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^5+4x^2+1}{x^8-x+3}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^5}{x^8}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{x^3}=0^+$

7) $\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^2+1}{(x-1)^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^2+1}{x^2-2x+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^2}{x^2}=3$

7. نهاية الدوال اللاجذرية

خاصية: لتكن f دالة عددية معرفة على مجال على الشكل $[a;+\infty[$ بحيث $f(x)\geq0\ \forall x\in[a;+\infty[$

- إذا كان $\lim_{x\to+\infty}f(x)=l$ و $l\geq0$ فان $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{f(x)}=\sqrt{l}$
- إذا كان $\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ و $l\geq0$ فان $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{f(x)}=+\infty$

أمثلة : 1) $\lim_{x\to2}\sqrt{3x^2+4}$ 2) $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x+7}$ 3) $\lim_{x\to2}\frac{\sqrt{x-1}-1}{x-2}$

أجوبة : 1) $\lim_{x\to2}\sqrt{3x^2+4}=\sqrt{3\times2^2+4}=\sqrt{16}=4$

2) $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x+7}$ لدينا : $\lim_{x\to+\infty}x+7=+\infty$ اذن : $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x+7}=+\infty$

3) $\lim_{x\to2}\frac{\sqrt{x-1}-1}{x-2}$ لدينا : $\lim_{x\to2}\sqrt{x-1}-1=0$ و $\lim_{x\to2}x-2=0$

نحصل عن شكل غ محدد من قبيل : $\frac{0}{0}$

نتخلص من ال ش غ م بالضرب **بالمرافق** ثم بالاختزال:

$$\lim_{x\to2}\frac{\sqrt{x-1}-1}{x-2}=\lim_{x\to2}\frac{(\sqrt{x-1}-1)(\sqrt{x-1}+1)}{(x-2)(\sqrt{x-1}+1)}=\lim_{x\to2}\frac{(\sqrt{x-1})^2-1^2}{(x-2)(\sqrt{x-1}+1)}$$

$$=\lim_{x\to2}\frac{x-1-1}{(x-2)(\sqrt{x-1}+1)}=\lim_{x\to2}\frac{x-2}{(x-2)(\sqrt{x-1}+1)}=\lim_{x\to2}\frac{1}{\sqrt{x-1}+1}=\frac{1}{2}$$

تمرين8: أحسب النهايات التالية : 1) $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{3x^2-5x+1}$

2) $\lim_{x\to-\infty}\sqrt{-5x+7}$ 3) $\lim_{x\to+\infty}-3x\sqrt{6x^2+x-4}$ 4) $\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}$

5) $\lim_{x\to4}\frac{\sqrt{x}-2}{x-4}$ 6) $\lim_{x\to1^+}\frac{1-2x}{\sqrt{x-1}}$ 7) $\lim_{x\to-3}\frac{1-\sqrt{x+4}}{x+3}$

8) $\lim_{x\to3}\frac{x^2-3x}{\sqrt{x-2}-1}$ 9) $\lim_{x\to5}\frac{2-\sqrt{x-1}}{x-5}$

أجوبة : 1) $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{3x^2-5x+1}$ لدينا: $\lim_{x\to+\infty}3x^2-5x+1=\lim_{x\to+\infty}3x^2=+\infty$

اذن : $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{3x^2-5x+1}=+\infty$

2) $\lim_{x\to-\infty}\sqrt{-5x+7}$ لدينا : $\lim_{x\to-\infty}-5x+7=+\infty$ اذن : $\lim_{x\to-\infty}\sqrt{-5x+7}=+\infty$

3) $\lim_{x\to+\infty}-3x\sqrt{6x^2+x-4}$ لدينا $\lim_{x\to-\infty}-3x=-\infty$ و $\lim_{x\to}\sqrt{6x^2+x-4}=+\infty$

اذن : $\lim_{x\to+\infty}-3x\sqrt{6x^2+x-4}=-\infty$

4) $\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}$ لدينا : $\lim_{x\to1}\sqrt{x}-1=0$ و $\lim_{x\to1}x-1=0$

نحصل عن شكل غ محدد من قبيل : $\frac{0}{0}$

نتخلص من ال ش غ م بالضرب **بالمرافق** ثم بالاختزال:

$$\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}=\lim_{x\to2}\frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{(x-1)(\sqrt{x}+1)}=\lim_{x\to2}\frac{(\sqrt{x})^2-1^2}{(x-1)(\sqrt{x}+1)}$$

$$\lim_{x\to1}\frac{x-1}{(x-1)(\sqrt{x}+1)}=\lim_{x\to1}\frac{1}{\sqrt{x}+1}=\frac{1}{2}$$

5) $\lim_{x\to4}\frac{\sqrt{x}-2}{x-4}$ لدينا : $\lim_{x\to4}\sqrt{x}-2=0$ و $\lim_{x\to4}x-4=0$

نحصل عن شكل غ محدد من قبيل : $\frac{0}{0}$

نتخلص من ال ش غ م بالضرب **بالمرافق** ثم بالاختزال:

$$\lim_{x\to4}\frac{\sqrt{x}-2}{x-4}=\lim_{x\to4}\frac{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}{(x-4)(\sqrt{x}+2)}=\lim_{x\to4}\frac{(\sqrt{x})^2-2^2}{(x-4)(\sqrt{x}+2)}$$

$$\lim_{x\to4}\frac{x-4}{(x-4)(\sqrt{x}+2)}=\lim_{x\to4}\frac{1}{\sqrt{x}+2}=\frac{1}{4}$$

6) $\lim\limits_{x\to1^+}\frac{1-2x}{\sqrt{x-1}}$ لدينا : $\lim\limits_{x\to1^+}1-2x=-1$ و $\lim\limits_{x\to1^+}\sqrt{x-1}=0^+$ ومنه $\lim\limits_{x\to1^+}\frac{1-2x}{\sqrt{x1}}=-\infty$

7) $\lim\limits_{x\to-3}\frac{1-\sqrt{x+4}}{x+3}$ لدينا : $\lim\limits_{x\to-3}1-\sqrt{x+4}=0$ و $\lim\limits_{x\to-3}x+3=0$

نحصل عن شكل غ محدد من قبيل : $\frac{0}{0}$

نتخلص من ال ش غ م بالضرب **بالمرافق** ثم بالاختزال:

$$\lim_{x\to-3}\frac{1-\sqrt{x+4}}{x+3}=\lim_{x\to-3}\frac{\left(1-\sqrt{x+4}\right)}{(x+3)\left(1+\sqrt{x+4}\right)}=\lim_{x\to-3}\frac{1^2-\left(\sqrt{x+4}\right)^2}{(x+3)\left(1+\sqrt{x+4}\right)}$$

$$=\lim_{x\to-3}\frac{-x-3}{(x+3)\left(1+\sqrt{x+4}\right)}=\lim_{x\to-3}\frac{-(x+3)}{(x+3)\left(1+\sqrt{x+4}\right)}=\lim_{x\to-3}\frac{-1}{1+\sqrt{x+4}}=-\frac{1}{2}$$

8) $\lim\limits_{x\to3}\frac{x^2-3x}{\sqrt{x-2}-1}$ لدينا : $\lim\limits_{x\to3}x^2-3x=0$ و $\lim\limits_{x\to3}\sqrt{x-2}-1=0$

نحصل عن شكل غ محدد من قبيل : $\frac{0}{0}$

نتخلص من ال ش غ م بالضرب **بالمرافق** ثم بالاختزال:

$$\lim_{x\to3}\frac{x^2-3x}{\sqrt{x-2}-1}=\lim_{x\to3}\frac{x(x-3)\left(\sqrt{x-2}+1\right)}{\left(\sqrt{x-2}+1\right)\left(\sqrt{x-2}-1\right)}=\lim_{x\to3}\frac{x(x-3)\left(\sqrt{x-2}+1\right)}{\left(\left(\sqrt{x-2}\right)^2-1^2\right)}$$

$$=\lim_{x\to3}\frac{x(x-3)\left(\sqrt{x-2}+1\right)}{x-3}=\lim_{x\to3}x\left(\sqrt{x-2}+1\right)=6$$

9) $\lim\limits_{x\to5}\frac{2-\sqrt{x-1}}{x-5}$ لدينا : $\lim\limits_{x\to5}2-\sqrt{x-1}=0$ و $\lim\limits_{x\to5}x-5=0$

نحصل عن شكل غ محدد من قبيل : $\frac{0}{0}$

نتخلص من ال ش غ م بالضرب **بالمرافق** ثم بالاختزال:

$$\lim_{x\to5}\frac{2-\sqrt{x-1}}{x-5}=\lim_{x\to5}\frac{\left(2-\sqrt{x-1}\right)\left(2+\sqrt{x-1}\right)}{(x-5)\left(2+\sqrt{x-1}\right)}=\lim_{x\to5}\frac{2^2-\left(\sqrt{x-1}\right)^2}{(x-5)\left(2+\sqrt{x-1}\right)}$$

$$=\lim_{x\to5}\frac{5-x}{(x-5)\left(2+\sqrt{x-1}\right)}=\lim_{x\to5}\frac{-(x-5)}{(x-5)\left(2+\sqrt{x-1}\right)}=\lim_{x\to5}\frac{-1}{2+\sqrt{x-1}}=\frac{-1}{4}$$

مبرهنة: لتكن f دالة عددية و l و a عددين حقيقيين

$\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=l$ يكافئ $\lim\limits_{\substack{x\to a\\x\succ a}}f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to a\\x\prec a}}f(x)=l$

مثال: نعتبر الدالة f المعرفة كالتالي: $f(x)=\frac{x^2-1}{|x-1|}$

1. أحسب النهايات التالية : $\lim\limits_{x\to1^+}f(x)$ و $\lim\limits_{x\to1^-}f(x)$

2. هل الدالة f تقبل نهاية عند : $x_0=1$ ؟

أجوبة : 1) ندرس اشارة $x-1$: $x-1=0\Leftrightarrow x=1$

x	$-\infty$ 1 $+\infty$
$x-1$	$-$ 0 $+$

$$\begin{cases}f(x)=\frac{x^2-1}{x-1},x>1\\f(x)=\frac{x^2-1}{-(x-1)},x<1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}f(x)=\frac{(x+1)(x-1)}{x-1},x>1\\f(x)=\frac{(x+1)(x-1)}{-(x-1)},x<1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}f(x)=x+1,x>1\\f(x)=-(x+1),x<1\end{cases}$$

$\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to1^+}x+1=2$ و $\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to1^-}-(x+1)=-2$

2) نلاحظ أن : $\lim\limits_{x\to1^+}f(x)\neq\lim\limits_{x\to1^-}f(x)$ ومنه لدالة f لا تقبل نهاية عند : $x_0=1$

تمرين9: نعتبر الدالة f المعرفة كالتالي: $f(x)=\frac{x^2-16}{|x-4|}$

1. أحسب النهايات التالية : $\lim\limits_{x\to4^+}f(x)$ و $\lim\limits_{x\to4^-}f(x)$

2. هل الدالة f تقبل نهاية عند : $x_0=4$ ؟

أجوبة : 1) ندرس اشارة $x-4$: $x-4=0\Leftrightarrow x=4$

x	$-\infty$ 4 $+\infty$
$x-4$	$-$ 0 $+$

$$\begin{cases}f(x)=\frac{x^2-16}{x-4},x>4\\f(x)=\frac{x^2-16}{-(x-4)},x<4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}f(x)=\frac{(x+4)(x-4)}{x-4},x>4\\f(x)=\frac{(x+4)(x-4)}{-(x-4)},x<4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}f(x)=x+4,x>4\\f(x)=-(x+4),x<4\end{cases}$$

$\lim\limits_{x\to4^+}f(x)=\lim\limits_{x\to4^+}x+4=8$ و $\lim\limits_{x\to4^-}f(x)=\lim\limits_{x\to4^-}-(x+4)=-8$

2) نلاحظ أن: $\lim\limits_{x\to4^+}f(x)\neq\lim\limits_{x\to4^-}f(x)$ ومنه الدالة f لاتقبل نهاية عند : $x_0=4$

تمرين10: نعتبر الدالة f المعرفة كالتالي: $f(x)=\frac{|x|}{x}+x^4$

1. أحسب النهايات التالية : $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)$ و $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)$

2. هل الدالة f تقبل نهاية عند : $x_0=0$ ؟

أجوبة :

$$\begin{cases}f(x)=\frac{x}{x}+x^4,x>0\\f(x)=-\frac{x}{x}+x^4,x<0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}f(x)=1+x^4,x>0\\f(x)=-1+x^4,x<0\end{cases}$$

$\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}1+x^4=1$ و $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}-1+x^4=-1$

2) نلاحظ أن : $\lim\limits_{x\to4^+}f(x)\neq\lim\limits_{x\to4^-}f(x)$

ومنه لدالة f لاتقبل نهاية عند : $x_0=0$

8. نهاية الدوال المثلثية

خاصيات: • $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$ • $\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}$ • $\lim\limits_{x\to0}\frac{\tan x}{x}=1$

• $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin ax}{ax}=1$ و $\lim\limits_{x\to0}\frac{\tan ax}{ax}=1$ $\forall a\in\mathbb{R}^*$

أمثلة: أحسب النهايات التالية :

1) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin2x}{4x}$ 2) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin6x}{\tan3x}$ 3) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\tan2x}{\sin4x}$

أجوبة : 1) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin2x}{4x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin2x}{2x}\times\frac{2x}{4x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin2x}{2x}\times\frac{1}{2}=1\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

2) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin6x}{\tan3x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin6x}{6x}\times\frac{6x}{\tan3x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin6x}{6x}\times\frac{3x}{\tan3x}\times2=1\times1\times2=2$

3) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\tan2x}{\sin4x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\tan2x}{2x}\times\frac{4x}{\sin4x}\times\frac{2x}{4x}=1\times1\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

تمرين11: أحسب النهايات التالية : 1) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin3x}{x}$ 2) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{\tan x}$ 3) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\tan10x}{\sin5x}$

أجوبة : 1) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin3x}{x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin3x}{3x}\times3=1\times3=3$

2) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{\tan x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{x}\times\frac{x}{\tan x}=1\times1=1$

3) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\tan10x}{\sin5x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\tan10x}{10x}\times\frac{5x}{\sin5x}\times\frac{10x}{5x}=1\times1\times2=2$

9. النهايات و الترتيب

خاصيات: لتكن I مجالا من نوع $[a,+\infty[$ حيث $a\in\mathbb{R}$ و $l\in\mathbb{R}$

لتكن f و U و V دوال عددية معرفة على المجال I اذا

▪ اذا كانت $U(x)\leq f(x)$ $\forall x\in I$ وكانت: $\lim\limits_{x\to+\infty}U(x)=+\infty$ فان :

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$

■ اذا كانت $\forall x\in I\quad f(x)\le V(x)$ وكانت $\lim_{x\to+\infty} V(x)=-\infty$

فان : $\lim_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$

■ اذا كانت $\forall x\in I\quad U(x)\le f(x)\le V(x)$ وكانت: $\lim_{x\to+\infty} U(x)=\lim_{x\to+\infty} V(x)=l$ فان : $\lim_{x\to+\infty} f(x)=l$

مثال1: أحسب النهاية التالية : $\lim_{x\to+\infty} 2x+\sin(x)$

الجواب: نعلم أن : $\forall x\in\mathbb{R}\quad -1\le \sin x\le 1$

اذن : $2x-1\le \sin x+2x\le 1+2x$ اذن : $2x-1\le \sin x+2x$

ونعلم أن : $\lim_{x\to+\infty} 2x-1=+\infty$ ومنه : $\lim_{x\to+\infty} 2x+\sin(x)=+\infty$

مثال2: أحسب النهاية التالية : $\lim_{x\to-\infty} -4x^2+\cos x$

الجواب: نعلم أن : $\forall x\in\mathbb{R}\quad -1\le \cos x\le 1$

اذن : $-4x^2-1\le -4x^2+\cos x\le 1-4x^2$ اذن : $-4x^2+\cos x\le 1-4x^2$

ونعلم أن : $\lim_{x\to+\infty} 1-4x^2=-\infty$ ومنه : $\lim_{x\to-\infty} -4x^2+\cos x=-\infty$

مثال3: أحسب النهاية التالية : $\lim_{x\to+\infty} x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right)$

الجواب: نعلم أن : $\forall x\in\mathbb{R}\quad -1\le \sin\left(\frac{1}{x}\right)\le 1$

اذن : $-x^2\le x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right)\le x^2$ ولدينا : $\lim_{x\to0} x^2=0$ و $\lim_{x\to0} -x^2=0$

ومنه : $\lim_{x\to+\infty} x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right)=0$

تمرين12: أحسب النهايات التالية :

1) $\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{2-\cos x}$ 2) $\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3}{3-\sin x}$

الجواب: 1) نعلم أن : $\forall x\in\mathbb{R}\quad -1\le \cos x\le 1$ اذن: $-1\le -\cos x\le 1$

اذن: $1\le 2-\cos x\le 3$ اذن: $\frac{1}{3}\le\frac{1}{2-\cos x}\le\frac{1}{1}$ اذن: $\frac{x}{3}\le\frac{x}{2-\cos x}\le\frac{x}{1}$

اذن : $\frac{x}{3}\le\frac{x}{2-\cos x}$ ونعلم أن: $\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{3}=+\infty$ ومنه : $\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{2-\cos x}=+\infty$

2) نعلم أن : $\forall x\in\mathbb{R}\quad -1\le \sin x\le 1$ اذن: $-1\le -\sin x\le 1$

اذن : $2\le 3-\sin x\le 4$ اذن: $\frac{1}{4}\le\frac{1}{3-\sin x}\le\frac{1}{2}$ اذن : $\frac{x^3}{4}\le\frac{x^3}{3-\sin x}\le\frac{x^3}{2}$

اذن : $\frac{x^3}{3-\sin x}\le\frac{x^3}{2}$ ونعلم أن: $\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3}{2}=-\infty$ ومنه : $\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3}{3-\sin x}=-\infty$

تمرين13: أحسب النهايات التالية: 1) $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+x+3}-2x$

2) $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+1}-x$ 3) $\lim_{x\to\mp\infty}\sqrt{x^2+2x+4}+3x$ 4) $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+x+1}-x$

5) $\lim_{x\to+\infty}\frac{x-1}{\sqrt{x^2+1}}$

الجواب: 1) $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+x+3}-2x$

لدينا : $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+x+3}=+\infty$ و $\lim_{x\to+\infty}-2x=-\infty$

نحصل عن شكل غ محدد من قبيل : $+\infty-\infty$

نتخلص من ال ش غ م بالتعميل ب x^2 داخل الجذر مربع:

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+x+3}-2x=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2}\right)}-2x=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2}\sqrt{\left(1+\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2}\right)}-2x$$

$=\lim_{x\to+\infty}|x|\sqrt{\left(1+\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2}\right)}-2x$ لأن : $\sqrt{x^2}=|x|$ وبما أن: $x\to+\infty$ فان: $\sqrt{x^2}=|x|=x$

ومنه : $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+x+3}-2x=\lim_{x\to+\infty}x\sqrt{\left(1+\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2}\right)}-2x=$

$=\lim_{x\to+\infty}x\left(\sqrt{\left(1+\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2}\right)}-2\right)=+\infty\times(-1)=-\infty$ لأن: $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$ و $\lim_{x\to+\infty}\frac{3}{x^2}=0$

2) $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+1}-x$ لدينا : $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+1}=+\infty$ و $\lim_{x\to+\infty}-x=-\infty$

نحصل عن شكل غ محدد من قبيل : $+\infty-\infty$

نتخلص من ال ش غ م بالضرب **بالمرافق** :

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+1}-x=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)}{\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)}=$$

$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+1}\right)^2-x^2}{\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)}=\frac{1}{+\infty}=0$ لأن : $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+1}+x=+\infty$

3) أ) $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+2x+4}+3x$ لدينا : $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+2x+4}=+\infty$ و $\lim_{x\to+\infty}3x=+\infty$

ومنه $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+2x+4}+3x=+\infty$

3) ب) لدينا : $\lim_{x\to-\infty}\sqrt{x^2+2x+4}=+\infty$ و $\lim_{x\to-\infty}3x=-\infty$

نحصل عن شكل غ محدد من قبيل : $+\infty-\infty$

نتخلص من ال ش غ م بالتعميل ب x^2 داخل الجذر مربع:

$$\lim_{x\to-\infty}\sqrt{x^2+2x+4}+3x=\lim_{x\to-\infty}\sqrt{x^2\left(1+\frac{2}{x}+\frac{4}{x^2}\right)}+3x=\lim_{x\to-\infty}\sqrt{x^2}\sqrt{\left(1+\frac{2}{x}+\frac{4}{x^2}\right)}+3x$$

$=\lim_{x\to-\infty}|x|\sqrt{\left(1+\frac{2}{x}+\frac{4}{x^2}\right)}+3x$ لدينا : $\sqrt{x^2}=|x|$ وبما أن: $x\to-\infty$ فان: $\sqrt{x^2}=|x|=-x$

ومنه : $\lim_{x\to-\infty}\sqrt{x^2+2x+4}+3x=\lim_{x\to-\infty}-x\sqrt{\left(1+\frac{2}{x}+\frac{4}{x^2}\right)}+3x=$

$=\lim_{x\to-\infty}-x\left(\sqrt{\left(1+\frac{2}{x}+\frac{4}{x^2}\right)}-3\right)=+\infty\times(-2)=-\infty$ لأن: $\lim_{x\to-\infty}\frac{2}{x}=0$ و $\lim_{x\to-\infty}\frac{4}{x^2}=0$

4) $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+x+1}-x$ لدينا : $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+x+1}=+\infty$ و $\lim_{x\to+\infty}-x=-\infty$

نحصل عن شكل غ محدد من قبيل : $+\infty-\infty$

نتخلص من ال ش غ م بالضرب **بالمرافق** :

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+x+1}-x=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+x+1}-x\right)\left(\sqrt{x^2+x+1}+x\right)}{\left(\sqrt{x^2+x+1}+x\right)}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+x+1}\right)^2-x^2}{\left(\sqrt{x^2+x+1}+x\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x+1}{\left(\sqrt{x^2+x+1}+x\right)}=\frac{+\infty}{+\infty}$$

لأن : $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+1}+x=+\infty$

دائما نحصل عن شكل غ محدد من قبيل : $\frac{\infty}{\infty}$

نعمل ب x^2 داخل الجذر مربع وب x في البسط ونجد :

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+x+1}-x=\lim_{x\to+\infty}\frac{x+1}{\left(\sqrt{x^2+x+1}+x\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}+x}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{x^2}\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}{x\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+x}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}{x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+1\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1+\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1+0}{\sqrt{1+0+0}+1}=\frac{1}{2}$$

5) $\lim_{x\to+\infty}\frac{x-1}{\sqrt{x^2+1}}$ لدينا : $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+1}=+\infty$ و $\lim_{x\to+\infty}x-1=+\infty$

نحصل عن شكل غ محدد من قبيل : $\frac{\infty}{\infty}$

نعمل ب x^2 داخل الجذر مربع وب x في البسط ونجد :

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x-1}{\sqrt{x^2+1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(1-\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(1-\frac{1}{x}\right)}{|x|\sqrt{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}}\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(1-\frac{1}{x}\right)}{x\sqrt{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}}$$

لأن : $\sqrt{x^2}=|x|$ وبما أن $x\to+\infty$: فان $\sqrt{x^2}=|x|=x$:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x-1}{\sqrt{x^2+1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1-\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}=\frac{1-0}{\sqrt{1+0}}=1$$ لأن: $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$ و $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2}=0$

تمرين14: نعتبر الدالة f المعرفة كالتالي :

$$\begin{cases} f(x)=\frac{x^2+4x+3}{x+1}, x\geq -1 \\ f(x)=\frac{x^2-3}{x}, x<-1 \end{cases}$$

1. أحسب النهايات التالية: $\lim_{x\to+\infty}f(x)$ و $\lim_{x\to-\infty}f(x)$

$\lim_{x\to-1^+}f(x)$ و $\lim_{x\to-1^-}f(x)$

2. هل الدالة f تقبل نهاية عند $x_0=-1$ ؟

الجواب: 1) $\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+4x+3}{x+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x}=\lim_{x\to+\infty}x=+\infty$

$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-3}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{x}=\lim_{x\to-\infty}x=-\infty$

$\lim_{x\to-1^+}f(x)=\lim_{x\to-1^+}\frac{x^2+4x+3}{x+1}$ لدينا $\lim_{x\to-1^+}x^2+4x+3=0$ و $\lim_{x\to-1^+}x+1=0$

نحصل عن شكل غ محدد من قبيل : $\frac{0}{0}$

نتخلص من ال ش غ م مثلا بالتعميل ثم بالاختزال:

نلاحظ أن : -1 جذر للحدودية x^2+4x+3

اذن : هي تقبل القسمة على $x+1$:

وباستعمال تقنية القسمة الاقليدية نجد أن : $x^2+4x+3=(x+3)(x+1)$

$$\lim_{x\to-1^+}\frac{x^2+4x+3}{x+1}=\lim_{x\to-1^+}\frac{(x+3)(x+1)}{x+1}=\lim_{x\to-1^+}x+3=2$$

$$\lim_{x\to-1^-}f(x)=\lim_{x\to-1^-}\frac{x^2-3}{x}=\frac{1-3}{-1}=\frac{-2}{-1}=2$$

2) نعم الدالة f تقبل نهاية عند : $x_0=-1$

لأن : $\lim_{x\to-1^-}f(x)=\lim_{x\to-1^+}f(x)$ ومنه : $\lim_{x\to-1}f(x)=2$

تمارين للبحث:

تمرين1: أحسب النهايات التالية :

1) $\lim_{x\to+\infty}\frac{5x^5+3x^2+x}{-10x^5-x-1}$ 2) $\lim_{x\to-\infty}\frac{-3x^3+2x^2+1}{x^4+3x-1}$

3) $\lim_{x\to2^-}\frac{-2x+1}{x^2-x-2}$ 4) $\lim_{x\to2^+}\frac{-2x+1}{x^2-x-2}$

5) $\lim_{x\to-3}\frac{1-\sqrt{x+4}}{x+3}$ 6) $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+x}-x$

تمرين2: نعتبر الدالة f المعرفة كالتالي :

$$\begin{cases} f(x)=\sqrt{x}; x\geq 0 \\ f(x)=x^3; x<0 \end{cases}$$

1. أحسب النهايات التالية : $\lim_{x\to0^+}f(x)$ و $\lim_{x\to0^-}f(x)$

2. استنتج : $\lim_{x\to0}f(x)$

تمرين3: أحسب النهايات التالية :

1) $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+x}-x$ 2) $\lim_{x\to-\infty}x-\sqrt{x^2-x}$

3) $\lim_{x\to+\infty}x-\sqrt{x^2-x}$ 4) $\lim_{x\to-\infty}\sqrt{5x^2+x-1}-2x+1$

5) $\lim_{x\to-\infty}\sqrt{5x^2+x-1}+2x+1$ 6) $\lim_{x\to-\infty}\sqrt{x^2+x-1}+x$

تمرين4: نعتبر الدالة f المعرفة كالتالي :

$$\begin{cases} f(x)=x^3-\frac{1}{8}; x>\frac{1}{2} \\ f(x)=1-2x; x\leq\frac{1}{2} \end{cases}$$

أحسب النهايات التالية : $\lim_{x\to+\infty}f(x)$ و $\lim_{x\to-\infty}f(x)$

و $\lim_{x\to\frac{1}{2}^+}f(x)$ $\lim_{x\to\frac{1}{2}^-}f(x)$

الأستاذ : عثماني نجيب