# النهايات

## نهاية لا منتهية لدالة عند $+\infty$ أو عند $-\infty$

- لتكن $f$ دالة عددية معرفة على مجال $[a,+\infty[$ حيث $a\in\mathbb{R}$ .
  إذا كان $f(x)$ يؤول إلى $+\infty$ عندما يؤول $x$ إلى $+\infty$ فإننا نكتب $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

بنفس الطريقة يمكنك التعبير عن الحالات التالية : $\lim_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$ و $\lim_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$ و $\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$

| | | | |
|---|---|---|---|
| • $\lim_{x\to+\infty} x=+\infty$ | • $\lim_{x\to+\infty} x^2=+\infty$ | • $\lim_{x\to+\infty} x^3=+\infty$ | • $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x}=+\infty$ |
| • $\lim_{x\to-\infty} x=-\infty$ | • $\lim_{x\to-\infty} x^2=+\infty$ | • $\lim_{x\to-\infty} x^3=-\infty$ | |

- لكل $n$ من $\mathbb{N}^*$ لدينا : $\lim_{x\to+\infty} x^n=+\infty$ و $\lim_{x\to-\infty} x^n=\begin{cases}+\infty & n\ \text{زوجي}\\ -\infty & n\ \text{فـردي}\end{cases}$

## نهاية منتهية لدالة عند $+\infty$ أو عند $-\infty$

- لتكن $f$ دالة عددية معرفة على مجال $[a,+\infty[$ حيث $a\in\mathbb{R}$ و ليكن $l$ عددا حقيقيا.
  إذا كان $f(x)$ يؤول إلى العدد $l$ عندما يؤول $x$ إلى $+\infty$ فإننا نكتب $\lim_{x\to+\infty} f(x)=l$ .
- لتكن $f$ دالة عددية معرفة على مجال $]-\infty,b]$ حيث $b\in\mathbb{R}$ و ليكن $l'$ عددا حقيقيا.
  إذا كان $f(x)$ يؤول إلى العدد $l'$ عندما يؤول $x$ إلى $-\infty$ فإننا نكتب $\lim_{x\to-\infty} f(x)=l'$ ..

| | | | |
|---|---|---|---|
| • $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}=0$ | • $\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x}=0$ | • $n\in\mathbb{N}^*;\ \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^n}=0$ | • $n\in\mathbb{N}^*;\ \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x^n}=0$ |

لتكن $f$ دالة عددية و $l$ عددا حقيقيا.
- إذا كانت $f$ تقبل نهاية $l$ في $+\infty$ ( أو في $-\infty$ ) فإن هذه النهاية وحيدة.
- $\lim_{x\to+\infty} f(x)=l$ يكافئ $\lim_{x\to+\infty} \left(f(x)-l\right)=0$
- $\lim_{x\to-\infty} f(x)=l$ يكافئ $\lim_{x\to-\infty} \left(f(x)-l\right)=0$

## النهايات المنتهية و اللامنتهية لدالة في نقطة

لتكن $f$ دالة عددية و $a$ و $l$ عددين حقيقيين بحيث $f$ معرفة على مجال على الشكل $]a-\alpha,a+\alpha[$ حيث $\alpha\in\mathbb{R}_*^+$ أو على مجموعة على الشكل $]a-\alpha,a+\alpha[-\{a\}$
إذا كان $f(x)$ يؤول إلى العدد $l$ عندما يؤول $x$ إلى العدد $a$ ، فإننا نكتب $\lim\limits_{x\to a} f(x)=l$

لتكن $f$ دالة عددية و $a$ و $l$ عددين حقيقيين.
إذا كانت $f$ تقبل نهاية $l$ في $a$ ، فإن هذه النهاية وحيدة.

| | | | |
|---|---|---|---|
| • $\lim\limits_{x\to 0} x=0$ | • $\lim\limits_{x\to 0} x^2=0$ | • $\lim\limits_{x\to 0} x^3=0$ | • $\lim\limits_{x\to 0} x^n=0$ لكل $n$ من $\mathbb{N}^*$ |

لتكن $f$ دالة عددية و $a$ عددا حقيقيا .
إذا كان $f(x)$ يؤول إلى $+\infty$ عندما يؤول $x$ إلى $a$ ، فإننا نكتب $\lim\limits_{x\to a} f(x)=+\infty$ .

## النهاية على اليمين و النهاية على اليسار لدالة في نقطة

لتكن $f$ دالة عددية و $a$ و $l$ عددين حقيقيين.

- إذا كان $f(x)$ يؤول إلى $l$ عندما يؤول $x$ إلى $a$ على اليمين فإننا نكتب $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x)=l$ أو $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=l$
- إذا كان $f(x)$ يؤول إلى $+\infty$ ( على التوالي إلى $-\infty$ ) عندما يؤول $x$ إلى $a$ على اليمين فإننا نكتب $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x)=+\infty$ أو $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=+\infty$ ( على التوالي $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x)=-\infty$ أو $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=-\infty$ )
- نعرف بنفس الطريقة النهاية على ليسار لدالة في نفطة.

| | | |
|---|---|---|
| • $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{1}{x}=+\infty$ | • $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{1}{x}=-\infty$ | • $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{1}{\sqrt{x}}=+\infty$ |
| • $n\in\mathbb{N}^*;\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{1}{x^n}=+\infty$ | • إذا كان $n$ زوجيا عير منعدم ،فإن : $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{1}{x^n}=+\infty$ | • $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \sqrt{x}=0$ |
| | • إذا كان $n$ فرديا غير منعدم ، فإن : $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{1}{x^n}=-\infty$ | |

لتكن $f$ دالة عددية .
$\lim\limits_{x\to a} f(x)=l$ يكافئ $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x)=l$

## العمليات على النهايات

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\lim f$ | $l$ | $l$ | $l$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ |
| $\lim g$ | $l'$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $-\infty$ |
| $\lim f+g$ | $l+l'$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | شكل غير محدد |

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\lim f$ | $l$ | $l>0$ | $l>0$ | $l<0$ | $l<0$ | $+\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $-\infty$ | $\pm\infty$ |
| $\lim g$ | $l'$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $0$ |
| $\lim f\times g$ | $l\times l'$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | شكل غير محدد |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $\lim f$ | $l\neq 0$ | $0^+$ | $0^-$ | $+\infty$ | $-\infty$ |
| $\lim \frac{1}{f}$ | $\frac{1}{l}$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $0$ | $0$ |

| | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\lim f$ | $l$ | $l>0$ | $l>0$ | $l<0$ | $l<0$ | $l$ | $\pm\infty$ | $+\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $-\infty$ |
| $\lim g$ | $l'\neq 0$ | $0^+$ | $0^-$ | $0^+$ | $0^-$ | $\pm\infty$ | $\pm\infty$ | $0^+$ | $0^-$ | $0^+$ | $0^-$ |
| $\lim \frac{f}{g}$ | $\frac{l}{l'}$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $0$ | شكل غير محدد | $+\infty$ | $-\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ |

## نهاية دالة حدودية – نهاية دالة جذرية

- لتكن $P$ و $Q$ دالتين حدوديتين و $x_0$ عددا حقيقيا .
  - $\lim\limits_{x\to x_0} P(x)=P(x_0)$
  - $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{P(x_0)}{Q(x_0)}$ في حالة $Q(x_0)\neq 0$
- و إذا كانت $ax^n$ و $bx^m$ هما على التوالي حديتي $P$ و $Q$ الأكبر درجة ، فإن :
  - $\lim\limits_{x\to+\infty} P(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} ax^n$
  - $\lim\limits_{x\to-\infty} P(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} ax^n$
  - $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{ax^n}{bx^m}$
  - $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{ax^n}{bx^m}$

## نهاية الدوال اللاجذرية

**لتكن** $f$ **دالة عددية معرفة على مجال** $[a,+\infty[$ **بحيث :** $(\forall x \in [a,+\infty[);f(x) \geq 0$

- **إذا كان** $\lim_{x \to +\infty} f(x) = l$ **و** $l \geq 0$ **فإن :** $\lim_{x \to +\infty} \sqrt{f(x)} = \sqrt{l}$
- **إذا كان** $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ **فإن :** $\lim_{x \to +\infty} \sqrt{f(x)} = +\infty$

**هذه الخاصية تبقى صالحة إذا كان** $x$ **يؤول إلى** $-\infty$ **أو إلى** $a$ **أو إلى** $a$ **على اليمين أو إلى** $a$ **على اليسار**

## نهايات الدوال المثلثية

- $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$
- $\lim_{x \to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$
- $\lim_{x \to 0} \frac{\tan x}{x} = 1$
- **لكل** $a$ **من** $\mathbb{R}^*$ : $\lim_{x \to 0} \frac{\sin(ax)}{x} = a$
- **لكل** $a$ **من** $\mathbb{R}$ لدينا : $\lim_{x \to a} \sin x = \sin a$
- $\lim_{x \to 0} \sin x = 0$ و $\lim_{x \to 0} \tan x = 0$
- **لكل** $a$ **من** $\mathbb{R}$ لدينا : $\lim_{x \to a} \cos x = \cos a$
- $\lim_{x \to 0} \cos x = 1$
- **لكل** ( $a \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ حيث $k \in \mathbb{Z}$ ) $\lim_{x \to a} \tan x = \tan a$

## النهايات و الترتيب

**ليكن** $I$ **مجالا من النوع** $[a,+\infty[$ **و** $l$ **عددا حقيقيا و لتكن** $f$ **و** $u$ **و** $v$ **دوال عددية معرفة على المجال** $I$ **.**

1) **إذا كان :** $\begin{cases} (\forall x \in I);u(x) \leq f(x) \\ \lim_{x \to +\infty} u(x) = +\infty \end{cases}$ **فإن :** $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

2) **إذا كان :** $\begin{cases} (\forall x \in I);u(x) \geq f(x) \\ \lim_{x \to +\infty} u(x) = -\infty \end{cases}$ **فإن :** $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$

3) **إذا كان :** $\begin{cases} (\forall x \in I);|f(x) - l| \leq u(x) \\ \lim_{x \to +\infty} u(x) = 0 \end{cases}$ **فإن :** $\lim_{x \to +\infty} f(x) = l$

4) **إذا كان :** $\begin{cases} (\forall x \in I);u(x) \leq f(x) \leq v(x) \\ \lim_{x \to +\infty} u(x) = \lim_{x \to +\infty} v(x) = l \end{cases}$ **فإن :** $\lim_{x \to +\infty} f(x) = l$ **( مبرهنة الدرك )**

**تبقىهذه الخاصيات تبقى صالحة إذا كان** $x$ **يؤول إلى** $-\infty$ **أو إلى** $a$ **أو إلى** $a$ **على اليمين أو إلى** $a$ **على اليسار**