

تمارين حول الحساب المثلثي

تمرين 1

بين أن

$$\cos 3x + \sin 3x = (\cos x - \sin x)(4 \cos x \sin x + 1)$$

$$\cos^2 \frac{5}{2}x - \cos^2 \frac{3}{2}x = (-\sin 4x) \sin x$$

$$\sin(x+y) \cdot \sin(x-y) = \sin^2 x - \sin^2 y$$

$$\sin(x+y) \cdot \sin(x-y) = \cos^2 y - \cos^2 x$$

$$\tan x - \tan y = \frac{2 \sin(x-y)}{\cos(x+y) + \cos(x-y)}$$

$$\tan^2 x - \tan^2 y = \frac{\sin(x+y) \cdot \sin(x-y)}{\cos^2 x \cos^2 y}$$

تمرين 2

نعتبر $(E): \sin 3x = -\sin 2x$

1- حل المعادلة (E) في $\mathbb{R}$ ثم في $]-\pi; \pi]$

2- أ- بين أن $\forall x \in \mathbb{R} \quad \sin 3x = (4 \cos^2 x - 1) \sin x$

ب- استنتج أن $(E) \Leftrightarrow (4 \cos^2 x + 2 \cos x - 1) \sin x = 0$

3- حدد من بين حلول المعادلة (E) في المجال $]-\pi; \pi]$ التي تحقق $4 \cos^2 x + 2 \cos x - 1 = 0$

4- حل في $\mathbb{R}$ المعادلة $4x^2 + 2x - 1 = 0$

5- استنتج $\cos \frac{4\pi}{5}$ و $\cos \frac{2\pi}{5}$

تمرين 3

نعتبر $p(x) = 2 \sin^2 x - 10 \sin x \cdot \cos x + 12 \cos^2 x$

1- بين أن $\forall x \in \mathbb{R} \quad 2 \sin^2 x + 12 \cos^2 x = 5 \cos(2x) + 7$

2- استنتج أن $\forall x \in \mathbb{R} \quad p(x) = 5\sqrt{2} \cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) + 7$

3- حل المعادلة $p(x) = 12$ $x \in]-\pi; \pi]$ ومثل حلولها على الدائرة المثلثية

4- حل المتراجحة $p(x) < 7$ $x \in \left]-\frac{5\pi}{8}; \frac{3\pi}{8}\right]$

تمرين 4

حل في $\mathbb{R}$ المعادلة $(E): \cos x + \cos 3x + \cos 5x + \cos 9x = 0$

تمرين 5

ليكن a و b عددين حقيقيين بحيث $\cos x + \cos y = a$ و $\sin x + \sin y = b$ و $a^2 + b^2 = 1$

1- بين أن $\cos(x-y) = -\frac{1}{2}$

2- بين أن $\sin(x+y) = 2ab$

تمرين 6

$$\text{ليكن } a \text{ و } b \text{ من } \left[0; \frac{\pi}{4}\right] \\ \text{بين أن } \tan(a+b) \leq \frac{\tan 2a + \tan 2b}{2}$$

تمرين 7

1- حل في $\mathbb{R}$ المعادلات

$$\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) + \cos\left(3x - \frac{\pi}{6}\right) = 0$$

$$\sin 2x = \tan x \quad ; \quad \tan x \cdot \tan 4x = -1$$

$$\cos x + \sin x = 1$$

$$\cos 2x + \cos x - 2 = 0$$

$$\cos 2x + \sin 2x = 1$$

2- حل المتراجحتين

$$x \in [0; \pi] \quad \sqrt{3} \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) - \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) > -1$$

$$x \in]-\pi; \pi] \quad \cos x + \sin x + \tan x \geq \frac{1}{\cos x}$$

تمرين 8

$$-1 \text{ بين أن } \forall x \in \mathbb{R} \quad \cos 3x = \cos x (4 \cos^2 x - 3)$$

$$-2 \text{ أ) حل في } [0; 2\pi[\text{ المعادلة } \cos 3x = \frac{1}{2}$$

$$\text{ب) بين أن } \cos \frac{\pi}{9} \text{ و } \cos \frac{7\pi}{9} \text{ و } \cos \frac{13\pi}{9} \text{ حلول}$$

$$\text{للمعادلة } 8X^3 - 6X - 1 = 0$$

$$\text{ج) استنتج قيم } A = \cos \frac{\pi}{9} + \cos \frac{7\pi}{9} + \cos \frac{13\pi}{9}$$

$$B = \cos \frac{\pi}{9} \cos \frac{7\pi}{9} + \cos \frac{7\pi}{9} \cos \frac{13\pi}{9} + \cos \frac{\pi}{9} \cos \frac{13\pi}{9} \quad \pi$$

$$C = \cos \frac{\pi}{9} \cos \frac{7\pi}{9} \cos \frac{13\pi}{9} \quad \pi$$

تمرين 9

ليكن x و y و z أعداد حقيقية حيث $x + y + z = \pi$

بين أن

$$\text{أ- } \cos^2 x + \cos^2 y + \cos^2 z - 1 = -2 \cos x \cdot \cos y \cdot \cos z$$

$$\text{ب- } \tan x + \tan y + \tan z = \tan x \cdot \tan y \cdot \tan z \text{ حيث } x \text{ و } y \text{ و } z \text{ تخالف } \frac{\pi}{2} + k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{ج- } \frac{\cos x}{\sin y \sin z} + \frac{\cos y}{\sin x \sin z} + \frac{\cos z}{\sin y \sin x} = 2 \text{ حيث } x \text{ و } y \text{ و } z \text{ تخالف } k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$$

تمرين 10

$$\text{نعتبر } p(x) = \sin x + \sin 2x + \sin 3x \text{ و } Q(x) = 1 + \cos x + \cos 2x$$

$$-1 \text{ بين أن } p(x) = \sin 2x(1 + 2 \cos x) \text{ و } Q(x) = \cos x(1 + 2 \cos x)$$

$$-2 \text{ حل في } \mathbb{R} \text{ المعادلة } p(x) = Q(x)$$

$$-3 \text{ حل المتراجحة } Q(x) \geq 0 \quad x \in [0; \pi]$$

تمرين 11

-1 أ- تحقق أن $\sin x + \sqrt{3} \cos x = 2 \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$

ب- حدد α حيث $\sin x - \cos x = \sqrt{2} \sin(x - \alpha)$

-2 نعتبر المعادلة: $\tan x = \frac{\sqrt{3} + \sqrt{2}}{\sqrt{2} - 1}$ (E)

بين أن $\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$ (E) $\Leftrightarrow$

-3 أ- حل في $[0; 2\pi]$ المعادلة (E)

ب- حل في $[0; 2\pi]$ المتراجحة $\tan x < \frac{\sqrt{3} + \sqrt{2}}{\sqrt{2} - 1}$