

اليمني محمد

المستوى: 1 ^{ème} BAC	الحساب المثلثي	الثانوية التأهيلية الأمير مولاي عبد الله التقنية - سيدي قاسم
STE+STM+SExp	Calcul Trigonométrique	الأستاذ : محمد اليمني
عدد الساعات : 8 ساعات		

I - صيغ التحويل :

(1) تحويل $\cos(a+b)$ و $\cos(a-b)$:

نعتبر $(O; \vec{i}; \vec{j})$ معلما متعامدا مرتبطا بدائرة مثلثية (U) ؛ وليكن a و b عددين حقيقيين ولتكن M و M' نقطتين من الدائرة المثلثية أفصولهما المنحنيين a و b على التوالي .

$$\text{لدينا : } \overrightarrow{OM} = \cos a \cdot \vec{i} + \sin a \cdot \vec{j} \text{ و } \overrightarrow{OM'} = \cos b \cdot \vec{i} + \sin b \cdot \vec{j} \text{ و } (OM; OM') \equiv a - b[2\pi]$$

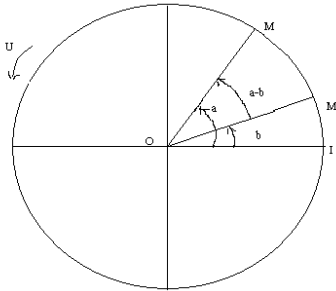
$$\text{إذن : } \cos(\overrightarrow{OM}; \overrightarrow{OM'}) = \frac{\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{OM'}}{OM \cdot OM'} = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$

$$\text{ومنه فإن : } \cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$

بتطبيق الصيغ السابقة لدينا :

$$\cos(a+b) = \cos(a-(-b)) = \cos a \cos(-b) + \sin a \sin(-b)$$

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$



(انظر الشكل بوضوح في الصفحة الأخيرة)

(2) تحويل $\sin(a+b)$ و $\sin(a-b)$:

نعلم أن $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$ وأن $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$ لكل x من $\mathbb{R}$.

$$\text{إذن : } \sin(a-b) = \cos\left(\left(\frac{\pi}{2} - a\right) + b\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right) \cos b - \sin\left(\frac{\pi}{2} - a\right) \sin b$$

$$\sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$$

$$\text{و : } \sin(a+b) = \cos\left(\left(\frac{\pi}{2} - a\right) + b\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right) \cos b + \sin\left(\frac{\pi}{2} - a\right) \sin b$$

$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$$

(3) تحويل $\tan(a+b)$ و $\tan(a-b)$:

وليكن a و b عددين حقيقيين وليكن $a \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ و $b \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ و $a+b \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$

$$\text{و } a-b \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$$

$$\text{لدينا : } \tan(a+b) = \frac{\sin(a+b)}{\cos(a+b)} = \frac{\sin a \cos b + \cos a \sin b}{\cos a \cos b + \sin a \sin b} = \frac{\cos a \cos b (\tan a + \tan b)}{\cos a \cos b (1 + \tan a \tan b)}$$

$$\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 + \tan a \tan b}$$

$$\tan(a-b) = \frac{(\tan a + \tan(-b))}{1 - \tan a \tan(-b)}$$

$$\tan(a-b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 - \tan a \tan b}$$

تطبيقات :

$$(1) \text{ احسب } \cos \frac{\pi}{12} \text{ و } \sin \frac{\pi}{12} \text{ و } \tan \frac{\pi}{12} \text{ واستنتج } \cos \frac{5\pi}{12} \text{ و } \sin \frac{5\pi}{12}$$

2 (باستعمال صيغة كل من $\cos(a-b)$ و $\sin(a-b)$ احسب : $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$ و $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$.

4 (نتائج :

من الصيغ السابقة نستنتج أنه إذا كان : $a = b$ فإن :
 $\cos(a+a) = \cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a$ وبما أن : $\cos^2 a + \sin^2 a = 1$ فإن :
 $\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a$
 ولدينا أيضا : $\sin 2a = 2\sin a \cos a$

إذا كان $a \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ و $a \neq \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$ فإن : $\tan 2a = \frac{2 \tan a}{1 - \tan^2 a}$

خلاصة :

$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$	$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$
$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$	$\sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$
$\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$	$\tan(a-b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b}$
$\tan 2a = \frac{2 \tan a}{1 - \tan^2 a}$ ؛ $\sin 2a = 2\sin a \cos a$	$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a$

تمرين 1 :

ب - احسب : $\cos \frac{7\pi}{12}$ و $\sin \frac{7\pi}{12}$ و $\tan \frac{7\pi}{12}$	1 (أ - تحقق أن : $\frac{7\pi}{12} = \frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{6}$.
ب - احسب : $\cos \frac{11\pi}{12}$ و $\sin \frac{11\pi}{12}$ و $\tan \frac{11\pi}{12}$	2 (أ - تحقق أن : $\frac{11\pi}{12} = \frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{4}$.
ب - $B = \sin\left(\frac{5\pi}{6} + x\right) - \sin\left(\frac{7\pi}{6} + x\right)$	3 (بسط ما يلي : أ - $A = \cos\left(\frac{\pi}{6} + x\right) + \cos\left(\frac{\pi}{6} - x\right)$.
ج - $C = \tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \times \tan\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ (حيث : $x \neq \frac{\pi}{4} + k\pi$ و $x \neq \frac{3\pi}{4} + k\pi$ ؛ $k \in \mathbb{Z}$)	

تمرين 2: 1 (احسب $\cos^2 a$ و $\sin^2 a$ بدلالة $\cos 2a$.

2 (أ - بين أن : $\cos 3a = 4\cos^3 a - 3\cos a$ وأن : $\sin 3a = 3\sin a - 4\sin^3 a$.

ب - استنتج $\cos^3 a$ بدلالة $\cos a$ و $\sin^3 a$ بدلالة $\sin a$.

ج - استنتج $\sin^3 a$ بدلالة $\sin a$ و $\cos^3 a$ بدلالة $\cos a$.

5 (صيغة $\cos a$ و $\sin a$ و $\tan a$ بدلالة $\tan \frac{a}{2}$:

ليكن a عددا حقيقيا بحيث $a \neq \pi + 2k\pi$.

لدينا : $\cos a = \cos\left(\frac{a}{2} + \frac{a}{2}\right) = \cos^2 \frac{a}{2} - \sin^2 \frac{a}{2} = \frac{\cos^2 \frac{a}{2} - \sin^2 \frac{a}{2}}{\cos^2 \frac{a}{2} + \sin^2 \frac{a}{2}}$ نقسم بسط ومقام هذا الكسر على $\cos^2 \frac{a}{2}$

ونحصل على : $\cos a = \frac{1 - \tan^2 \frac{a}{2}}{1 + \tan^2 \frac{a}{2}}$ ولدينا : $\sin a = \sin\left(\frac{a}{2} + \frac{a}{2}\right) = 2\sin \frac{a}{2} \cos \frac{a}{2} = 2 \tan \frac{a}{2} \cos^2 \frac{a}{2}$

$$\text{وبما أن } \cos^2 \frac{a}{2} = \frac{1}{1 + \tan^2 \frac{a}{2}} \text{ فإن : } \sin a = \frac{2 \tan \frac{a}{2}}{1 + \tan^2 \frac{a}{2}}$$

$$\text{وإذا كان } a \neq \pi + 2k\pi \text{ و } a \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \text{ فإن : } \tan a = \tan \left(\frac{a}{2} + \frac{a}{2} \right) = \frac{2 \tan \frac{a}{2}}{1 - \tan^2 \frac{a}{2}}$$

خلاصة :

$$\tan a = \frac{2 \tan \frac{a}{2}}{1 - \tan^2 \frac{a}{2}} \quad ; \quad \sin a = \frac{2 \tan \frac{a}{2}}{1 + \tan^2 \frac{a}{2}} \quad ; \quad \cos a = \frac{1 - \tan^2 \frac{a}{2}}{1 + \tan^2 \frac{a}{2}}$$

إذا وضعنا $t = \tan \frac{a}{2}$ فإن :

$$\tan a = \frac{2t}{1 - t^2} \quad ; \quad \sin a = \frac{2t}{1 + t^2} \quad ; \quad \cos a = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}$$

تمرين 3 :

- 1 (ليكن a عدد حقيقي بحيث : $\tan a = 3$. احسب : $\sin 2a$ و $\cos 2a$ و $\tan 2a$.
- 2 (احسب التعبير التالي بدلالة $\tan a$: $-2\sin^2 a + 2\sin a \cos a + 5$.

الحل :

$$-2\sin^2 a + 2\sin a \cos a + 5 = 1 - 2\sin^2 a + 2\sin a \cos a + 4 = \cos 2a + \sin 2a + 4$$

$$-2\sin^2 a + 2\sin a \cos a + 5 = \frac{1 - \tan^2 a}{1 + \tan^2 a} + \frac{2 \tan a}{1 + \tan^2 a} = \frac{1 - \tan^2 a + 2 \tan a}{1 + \tan^2 a} = \frac{2 - (\tan a - 1)^2}{1 + \tan^2 a} \quad (2)$$

(6) تحويل الجداء إلى مجموع :

ليكن a و b عددين حقيقيين وليكن a و b عددين حقيقيين.

$$\cos(a + b) + \cos(a - b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b + \cos a \cos b + \sin a \sin b \quad \text{لدينا :}$$

$$\cos(a + b) + \cos(a - b) = 2\cos a \cos b$$

$$\cos(a + b) - \cos(a - b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b - \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

$$\cos(a + b) - \cos(a - b) = -2\sin a \sin b$$

$$\sin(a + b) + \sin(a - b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b + \sin a \cos b - \cos a \sin b$$

$$\sin(a + b) + \sin(a - b) = 2\sin a \cos b$$

$$\sin(a + b) - \sin(a - b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b - \sin a \cos b + \cos a \sin b$$

$$\sin(a + b) - \sin(a - b) = 2\cos a \sin b$$

من هذه العلاقات نستنتج :

$\cos a \sin b = \frac{1}{2} [\sin(a + b) - \sin(a - b)] \quad (3)$	$\cos a \cos b = \frac{1}{2} [\cos(a + b) + \cos(a - b)] \quad (1)$
$\sin a \cos b = \frac{1}{2} [\sin(a + b) + \sin(a - b)] \quad (4)$	$\sin a \sin b = -\frac{1}{2} [\cos(a + b) - \cos(a - b)] \quad (2)$

تمرين 4 :

1 (اكتب على شكل مجموع الجداءات التالية :

$$\sin x \sin 4x \quad ; \quad \cos x \cos 3x \quad ; \quad \cos \left(x + \frac{\pi}{3} \right) \cos \left(2x + \frac{\pi}{4} \right)$$

2 (اكتب على شكل مجموع الجداءات التالية :

$$\sin 2x \sin 3x \sin 5x \quad ; \quad \cos x \cos 2x \cos 3x \quad ; \quad \cos x \cos 2x \quad ; \quad \sin\left(-x + \frac{\pi}{4}\right) \cos 2x$$

7 (تحويل المجموع إلى جداء :

ليكن a و b عددين حقيقيين .

$$\text{نضع } p = a + b \text{ و } q = a - b \text{ : إذن } a = \frac{p+q}{2} \text{ و } b = \frac{p-q}{2} .$$

العلاقات (1 و (2 و (3 و (4) تصبح :

$\sin p + \sin q = 2 \sin\left(\frac{p+q}{2}\right) \cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$ (3	$\cos p + \cos q = 2 \cos\left(\frac{p+q}{2}\right) \cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$ (1
$\sin p - \sin q = 2 \cos\left(\frac{p+q}{2}\right) \sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$ (4	$\cos p - \cos q = -2 \sin\left(\frac{p+q}{2}\right) \sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$ (2

تمرين 5 : 1 (اكتب المجموع التالي على شكل جداء من أربعة عوامل : $\sin x + \sin 3x + \sin 5x + \sin 7x$.

$$2 (\quad ABC \text{ مثلث . بين أن : } \sin \hat{A} + \sin \hat{B} + \sin \hat{C} = 4 \cos \frac{\hat{A}}{2} \cos \frac{\hat{B}}{2} \cos \frac{\hat{C}}{2}$$

II - تحويل $a \cos x + b \sin x$:

ليكن a و b عددين حقيقيين حيث $(a;b) \neq (0;0)$.

$$\text{لدينا : } a \cos x + b \sin x = \sqrt{a^2 + b^2} \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos x + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin x \right)$$

$$\text{ولدينا : } \left| \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right| \leq 1 \text{ و } \left| \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right| \leq 1 \text{ : لأن : } a^2 \leq a^2 + b^2 \text{ و } b^2 \leq a^2 + b^2 .$$

$$\text{وبما أن : } \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)^2 = 1 \text{ فإنه يوجد عدد حقيقي } \alpha \text{ بحيث :}$$

$$\sin \alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \text{ و } \cos \alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} .$$

$$\text{إذن : } a \cos x + b \sin x = \sqrt{a^2 + b^2} \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos x + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin x \right)$$

$$a \cos x + b \sin x = \sqrt{a^2 + b^2} (\cos \alpha \cos x + \sin \alpha \sin x)$$

$$a \cos x + b \sin x = \sqrt{a^2 + b^2} \cos(x - \alpha)$$

$$\text{أو : يوجد عدد حقيقي } \beta \text{ بحيث : } \sin \beta = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \text{ و } \cos \beta = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} .$$

$$\text{في هذه الحالة : } a \cos x + b \sin x = \sqrt{a^2 + b^2} \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos x + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin x \right)$$

$$a \cos x + b \sin x = \sqrt{a^2 + b^2} (\sin \beta \cos x + \cos \beta \sin x)$$

$$a \cos x + b \sin x = \sqrt{a^2 + b^2} \sin(x + \beta)$$

إذن :

لكل عددين حقيقيين a و b حيث $(a;b) \neq (0;0)$ لدينا :

$$a \cos x + b \sin x = \sqrt{a^2 + b^2} \cos(x - \alpha) \text{ أو } a \cos x + b \sin x = \sqrt{a^2 + b^2} \sin(x + \beta)$$

أمثلة :

$$1. \quad \sqrt{3} \cos x + \sin x = 2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cos x + \frac{1}{2} \sin x \right) = 2 \left(\cos \frac{\pi}{6} \cos x + \sin \frac{\pi}{6} \sin x \right) = 2 \cos \left(x - \frac{\pi}{6} \right)$$

$$\cos x + \sin x = \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cos x + \frac{\sqrt{2}}{2} \sin x \right) = \sqrt{2} \left(\sin \frac{\pi}{4} \cos x + \cos \frac{\pi}{4} \sin x \right) = \sqrt{2} \sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right) . 1$$

ملاحظة :

يمكننا تحويل $a \cos x + b \sin x = c$ من حل معادلات من نوع : أو مترجمات من نوع :
 $a \cos x + b \sin x \leq c$ أو : $a \cos x + b \sin x < c$ أو : $a \cos x + b \sin x \geq c$ أو : $a \cos x + b \sin x > c$ أمثلة :

(1) حل في IR المعادلة : $\cos x + \sqrt{3} \sin x = 1$.

حل بعض التمارين الواردة في الدرس

تمرين 5 :

(1) اكتب المجموع التالي على شكل جداء من أربعة عوامل : $\sin x + \sin 3x + \sin 5x + \sin 7x$.

$$\begin{aligned} \sin x + \sin 3x + \sin 5x + \sin 7x &= 2 \sin \left(\frac{x+3x}{2} \right) \cos \left(\frac{x-3x}{2} \right) + 2 \sin \left(\frac{5x+7x}{2} \right) \cos \left(\frac{5x-7x}{2} \right) \\ &= 2 \sin 2x \cos x + 2 \sin 6x \cos x = 2 \cos x (\sin 2x + \sin 6x) \end{aligned}$$

لدينا :

$$= 2 \cos x \left(2 \sin \left(\frac{2x+6x}{2} \right) \cos \left(\frac{2x-6x}{2} \right) \right) = 4 \cos x \sin 4x \cos 2x = 8 \cos x \cos 2x \sin 2x \cos 2x$$

إذن : $\sin x + \sin 3x + \sin 5x + \sin 7x = 8 \cos x \cos 2x \sin 2x \cos 2x$

(2) ABC مثلث . نبين أن : $\sin \hat{A} + \sin \hat{B} + \sin \hat{C} = 4 \cos \frac{\hat{A}}{2} \cos \frac{\hat{B}}{2} \cos \frac{\hat{C}}{2}$.

لدينا : $\sin A + \sin B = 2 \sin \left(\frac{A+B}{2} \right) \cos \left(\frac{A-B}{2} \right)$.

بما أن : في مثلث ABC لدينا : $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = \pi$ فإن : $\frac{A+B}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{C}{2}$

إذن : لدينا : $\sin A + \sin B = 2 \sin \left(\frac{A+B}{2} \right) \cos \left(\frac{A-B}{2} \right) = 2 \sin \left(\frac{\pi}{2} - \frac{C}{2} \right) \cos \left(\frac{A-B}{2} \right) = 2 \cos \frac{C}{2} \cos \left(\frac{A-B}{2} \right)$.

ولدينا : $\sin C = 2 \sin \frac{C}{2} \cos \frac{C}{2}$.

إذن : $\sin A + \sin B + \sin C = 2 \cos \frac{C}{2} \left(\sin \frac{C}{2} + \cos \frac{A-B}{2} \right) = 2 \cos \frac{C}{2} \left(\cos \left(\frac{\pi}{2} - \frac{C}{2} \right) + \cos \left(\frac{A-B}{2} \right) \right)$.

ولدينا :

$$\cos \left(\frac{\pi}{2} - \frac{C}{2} \right) + \cos \left(\frac{A-B}{2} \right) = 2 \cos \left(\frac{\pi - C + A - B}{4} \right) \cos \left(\frac{\pi - C - A + B}{4} \right)$$

$$\cos \left(\frac{\pi}{2} - \frac{C}{2} \right) + \cos \left(\frac{A-B}{2} \right) = 2 \cos \left(\frac{\pi + A - (C+B)}{4} \right) \cos \left(\frac{\pi + B - (C+A)}{4} \right)$$

$$\cos \left(\frac{\pi}{2} - \frac{C}{2} \right) + \cos \left(\frac{A-B}{2} \right) = 2 \cos \left(\frac{\pi + A - \pi + A}{4} \right) \cos \left(\frac{\pi + B - \pi + B}{4} \right) = 2 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2}$$

إذن : $\sin A + \sin B + \sin C = 2 \cos \frac{C}{2} \times 2 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} = 4 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}$.

