

## تحليلية الجداء السلمي وتطبيقاته

### I- تذكرة تعريف تعريف

لتكن  $\vec{u}$  و  $\vec{v}$  متوجهتين غير منعدمتين . نعتبر  $A$  و  $B$  و  $C$  ثلا ث نقط من المستوى حيث  $(AB) \perp (AC)$  و  $\vec{u} = \vec{AB}$  و  $\vec{v} = \vec{AC}$  على  $C$  على  $(AB)$  .  
الجداء السلمي للمتوجهتين الغير المنعدمتين  $\vec{u}$  و  $\vec{v}$  هو العدد الحقيقي  $\vec{u} \cdot \vec{v}$  بحيث  $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{AB} \cdot \vec{AC} = \vec{AB} \times \vec{AC}$  .

### تعريف

الجداء السلمي للمتوجهتين الغير المنعدمتين  $\vec{u}$  و  $\vec{v}$  هو العدد الحقيقي  $\vec{u} \cdot \vec{v}$  بحيث  $\alpha$  قياس لزاوية الموجهة  $\widehat{\vec{u}; \vec{v}}$  .

### ملاحظة

\* إذا كانت  $\vec{u}$  أو  $\vec{v}$  منعدمة فإن  $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

\* إذا كانت  $\vec{u}$  و  $\vec{v}$  غير منعدمتين فإن  $\cos \alpha = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \|\vec{v}\|}$

### خاصيات

مهما كانت المتجهات  $\vec{u}$  و  $\vec{v}$  و  $\vec{w}$  و العدد الحقيقي  $\alpha$  .

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$$

$$(\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{w} = \vec{u} \cdot \vec{w} + \vec{v} \cdot \vec{w}$$

$$\vec{w} \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = \vec{w} \cdot \vec{u} + \vec{w} \cdot \vec{v}$$

$$(\alpha \vec{u}) \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot (\alpha \vec{v}) = \alpha (\vec{u} \cdot \vec{v})$$

### تعامد متوجهين

$$\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$$

### II- صيغة تحليلية

#### 1- الصيغة التحليلية للجداء السلمي

##### خاصية

المستوى  $(P)$  منسوب إلى معلم متعمد ممنظم  $(O; \vec{i}; \vec{j})$  .

إذا كانت  $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$  و  $\vec{v} = x'\vec{i} + y'\vec{j}$  فإن  $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'$

**ملاحظة** إذا كان  $(x; y)$  بالنسبة لأساس متعمد ممنظم

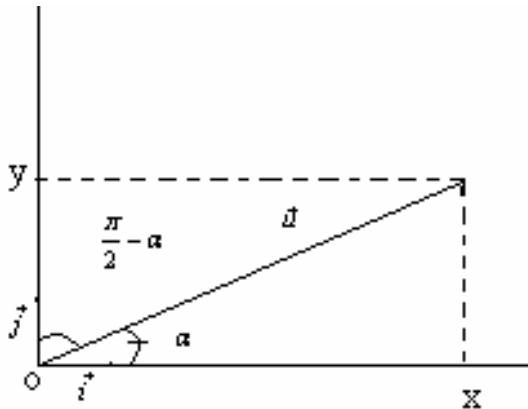
$$\vec{u} \cdot \vec{j} = y \quad ; \quad \vec{u} \cdot \vec{i} = x \quad \text{فإن} \quad (\vec{i}; \vec{j})$$

**أمثلة** أحسب  $\vec{u} \cdot \vec{v}$  في الحالات.....

#### 2- احذفنا متوجهة في أساس متعمد ممنظم مباشر

ليكن  $(x; y)$  بالنسبة لمعلم متعمد ممنظم

$$\text{مباشر} \quad (\vec{i}; \vec{j}; \vec{u}) \quad \text{و} \quad \alpha \quad \text{قياس} \quad (O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{u})$$



لدينا  $\vec{u} \cdot \vec{j}$  ;  $x = \vec{u} \cdot \vec{i}$

$$y = \|\vec{u}\| \|\vec{j}\| \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \quad x = \|\vec{u}\| \|\vec{i}\| \cos\alpha$$

$$y = \|\vec{u}\| \sin\alpha \quad x = \|\vec{u}\| \cos\alpha$$

## خاصية

إذا كان  $(x; y)$  زوج إحداثي متوجه غير منعدمة  $\vec{u}$  بالنسبة لأساس متعامد ممنظم مباشر  $(\vec{i}; \vec{j})$  و  $\alpha$  قياس  $\widehat{\vec{i}; \vec{u}}$  فان

$$\vec{u} = \|\vec{u}\| (\cos\alpha \vec{i} + \sin\alpha \vec{j})$$

فان

## حالة خاصة

إذا كانت  $\vec{u}$  متوجهة واحدية (أي  $\|\vec{u}\| = 1$ ) فان

### 3- الصيغة التحليلية لمنظم متوجهة ولمسافة نقطتين

- إذا كان  $(x; y)$  زوج إحداثي  $\vec{u}$  بالنسبة لأساس متعامد ممنظم  $(\vec{i}; \vec{j})$  فان
- إذا كان  $B(x_B, y_B)$  و  $A(x_A, y_A)$  فان

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

### 4- الشرط التحليلي لتعامد متوجهتين

## خاصية

المستوى  $(P)$  منسوب إلى معلم متعامد ممنظم  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ .

$$\vec{v} = x' \vec{i} + y' \vec{j} \quad \vec{u} = x \vec{i} + y \vec{j} \quad \vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow x x' + y y' = 0$$

## تمرين

حدد المتجهات الواحدية والمعتمدة مع  $\vec{u}(-1; 2)$

$$\begin{cases} \vec{u} \perp \vec{v} \\ \|\vec{v}\| = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x + 2y = 0 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

تمرين نعتبر  $A(1; 3)$   $B(3; 1)$   $C(-3; -1)$

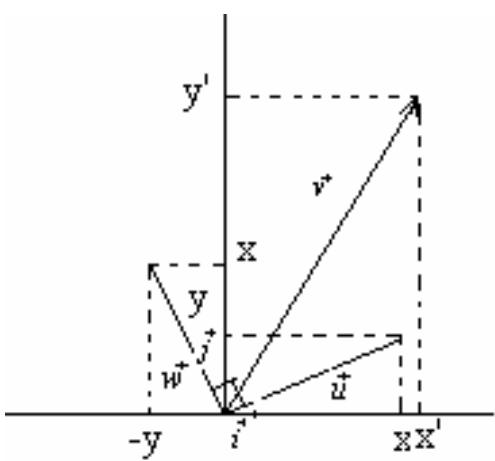
بين أن  $ABC$  قائم الزاوية في  $A$

### 5- حساب $\sin\theta$ و $\cos\theta$

المستوى  $(P)$  منسوب إلى معلم متعامد ممنظم  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ .

إذا كانت  $\vec{v} = x' \vec{i} + y' \vec{j}$  و  $\theta$  قياس  $\widehat{\vec{u}; \vec{v}}$  فان  $\vec{u} = x \vec{i} + y \vec{j}$

$$\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\| \quad \widehat{(\vec{u}; \vec{w})} = \frac{\pi}{2} \quad [2\pi]$$



$$\widehat{(\vec{v}; \vec{w})} = \widehat{(\vec{u}; \vec{w})} - \widehat{(\vec{u}; \vec{v})}$$

لدينا باستعمال علاقة شال

$$\overrightarrow{(\vec{v};\vec{w})} = \frac{\pi}{2} - \theta$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin \theta$$

$$\sin \theta = \frac{\vec{v} \cdot \vec{w}}{\|\vec{w}\| \|\vec{v}\|}$$

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = xy' - yx' = \det(\vec{u};\vec{v})$$

$$\sin \theta = \frac{\det(\vec{u};\vec{v})}{\|\vec{u}\| \|\vec{v}\|} = \frac{xy' - x'y}{\sqrt{x^2 + y^2} \sqrt{x'^2 + y'^2}}$$

تمرين

ليكن  $\theta$  القياس الرئيسي للزاوية  $(\vec{u};\vec{v})$  حيث  $\vec{u}(-\sqrt{3};-3)$  و  $\vec{v}(-1;\sqrt{3})$ . حدد  $\theta$ .

### III- معادلة مستقيم معرف بمتجهة منتظمة

#### 1- متجهة منتظمة

تعريف  $(D)$  مستقيم في المستوى، كل متجهة غير منعدمة عمودية على متجهة موجهة للمستقيم  $(D)$  تسمى متجهة منتظمة على المستقيم  $(D)$ .

#### 2- خصائص

\* إذا كانت  $\vec{n}$  منتظمة على  $(D)$  فإن كل متجهة  $k\vec{n}$  منتظمة عليه.

\* إذا كانت  $\vec{n}$  و  $\vec{n}'$  متجهتين منظمتين على مستقيم  $(D)$  فانهما تكونان مستقيمتين.

\* إذا كانت  $(a;b)$  موجهة لـ  $(D)$  فإن المتجهة  $\vec{n}(-b;a)$  منتظمة عليه.

#### 2- معادلة مستقيم معرف ب نقطة و متجهة منتظمة عليه

لتكن  $M$  نقطة من المستوى  $(x_0;y_0)$  و  $(a;b)$  متجهة غير منعدمة

$$\vec{u}(-b;a) \text{ مстыقيمتان}$$

$M$  تنتمي إلى المستقيم المار من  $A$  و الموجه  $\vec{u}(-b;a)$   $\Leftrightarrow$  بالتجهه  $\vec{AM} \perp \vec{n}$

إذن مجموعة النقط  $M$  من المستوى التي تحقق  $\vec{AM} \cdot \vec{n} = 0$  هي المستقيم المار من  $A$  و الموجه بـ  $\vec{u}(-b;a)$

معادله ستكون على شكل  $ax + by + c = 0$

#### خاصية

لتكن  $(x_0;y_0)$  نقطة غير منعدمة و  $(a;b)$  نقطة من المستوى.

مجموعة النقط  $M$  من المستوى التي تتحقق  $\vec{AM} \cdot \vec{n} = 0$  هي المستقيم المار من  $A$  و الموجه بـ  $(-b;a)$

#### خاصية

إذا كانت  $(a;b)$  منتظمة على  $(D)$  فإن معادلة  $(D)$  على شكل  $ax + by + c = 0$

إذا كان  $0$  منتظمة على  $(D)$ :  $ax + by + c = 0$

تمرين

1- حدد متجهة منتظمة لكل مستقيم من المستقيمات التالية

$$(D_1): 3x - 2y + 1 = 0 ; (D_2): 2y - 1 = 0$$

$$(D_3): x - 3 = 0$$

2- حدد المستقيم المار من  $(-1;3)$  و  $(4;3)$  و  $\vec{n}$  منتظمة عليه

تمرين

في مستوى منسوب إلى معلم متعامد ممنظم نعتبر  $(2;1)$  و  $(0;1)$  و  $(-2;3)$  و  $(-2;5)$  و  $(5;0)$  و  $(1;0)$  و  $(-3;1)$

1- حدد معادلة للمستقيم  $(D)$  المار من  $A$  و  $\vec{u}$  منتظمة عليه

- أ) حدد معادلة ديكارتية لواسط  $[A;B]$
- ب) حدد  $\Omega$  تقاطع واسطات المثلث  $ABC$
- 3- حدد معادلة ديكارتية للارتفاع المار من  $A$

### 3- شرط تعاامد مستقيمين خاصية

في مستوى منسوب إلى معلم م.م نعتبر  $(a;b) \neq (0;0)$  ;  $(a';b') \neq (0;0)$  حيث  $(D): ax + by + c = 0$   $(D'): a'x + b'y + c' = 0$

$$(D) \perp (D') \Leftrightarrow aa' + bb' = 0$$

### نتيجة

$$(D): y = mx + p \quad (D'): y = m'x + p' \\ (D) \perp (D') \Leftrightarrow mm' = -1$$

### 4- مسافة نقطة عن مستقيم نشاط

المستوى  $(P)$  منسوب إلى معلم متعامد ممنظم  $(D)$ .  $(D)$  المستقيم المار من  $(O; \vec{i}; \vec{j})$  .  $(a;b) \neq (0;0)$  حيث  $(D)$  المستقيم المار من  $A(x_0; y_0)$  نقطة من المستوى  $P$  عليه. لتكن  $H$  المسقط العمودي للنقطة  $A$  على  $(D)$ .

أ- أحسب  $\vec{n} \cdot \vec{BA}$  بدلالة  $\vec{n}$  و  $\vec{BA}$

$$HA = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{BA}|}{\|\vec{n}\|}$$

د- ليكن  $0 = ax + by + c = 0$  حيث  $(D)$

$$HA = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

### خاصية

المستوى  $(P)$  منسوب إلى معلم متعامد ممنظم  $(D)$  .  $(D)$  المستقيم المار من  $A(x_0; y_0)$  حيث  $(a;b) \neq (0;0)$  و  $0 = ax + by + c = 0$  ليكن  $A$  نقطة من المستوى

$$d(A; (D)) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad \text{هي مسافة النقطة } A \text{ عن المستقيم } (D)$$

### تمرين

$$A(-2; 3) ; \quad (D): 3x - 4y + 1 = 0$$

حدد  $d(A; (D))$

### تمرين

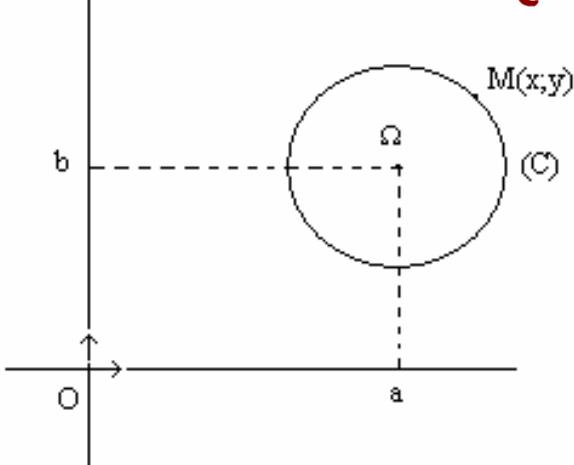
أحسب احداثي النقطة  $H$  المسقط العمودي للنقطة  $A(-3; 5)$

$$(D): x - 2y + 8 = 0$$

## دراسة تحليلية دائرة

### I- معادلة دائرة

#### 1- معادلة ديكارتية دائرة معرفة بمركزها وشعاعها



في مستوى منسوب إلى معلم متعامد ممنظم ،  
نعتبر (C) دائرة مركزها  $\Omega(a;b)$  وشعاعها  $r$  ( $r \geq 0$ )  
 $M(x;y) \in (C) \Leftrightarrow \Omega M = r$   
 $\Leftrightarrow \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = r$   
 $\Leftrightarrow (x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$

## مرينه

في مستوى منسوب إلى معلم متعامد ممنظم .  
معادلة الدائرة (C) التي مركزها  $\Omega(a;b)$  وشعاعها  $r$  ( $r \geq 0$ ) هي  $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$

## حالة خاصة

معادلة الدائرة (C) التي مركزها أصل المعلم وشعاعها  $r$  هي  $x^2 + y^2 = r^2$

## أمثلة

في مستوى منسوب إلى معلم متعامد ممنظم

-1 - حدد معادلة للدائرة التي مركزها  $\Omega(-2;3)$  وشعاعها 4

-2 - حدد معادلة للدائرة التي مركزها  $A(2;3)$  وتمر من النقطة

## ملاحظة

\* بوضع  $c = a^2 + b^2 - r^2$

معادلة الدائرة (C) التي مركزها  $\Omega(a;b)$  وشعاعها  $r$  تكتب على شكل

\* نعتبر  $\{\Omega\}$  دائرة مركزها  $\Omega$  وشعاعها منعدم

## 2- دراسة المعادلة

لتكن (E) مجموعة النقط (M(x;y)) التي تحقق

$$M(x;y) \in (E) \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-a)^2 + (y-b)^2 = a^2 + b^2 - c$$

إذا كان  $a^2 + b^2 - c > 0$  فإن

إذا كان  $a^2 + b^2 - c = 0$  فإن  $(E) = \{\Omega(a;b)\}$

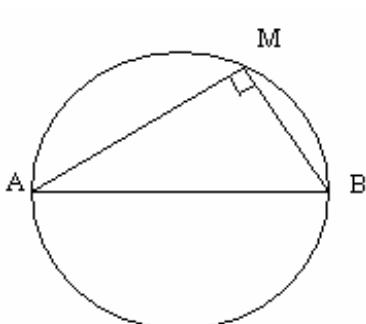
إذا كان  $a^2 + b^2 - c < 0$  فإن  $(E) = C(\Omega(a;b);r)$

## مرينه

المستوى منسوب إلى معلم متعامد ممنظم.  $a$  و  $b$  و  $c$  أعداد حقيقية.

$a^2 + b^2 - c \geq 0$  هي معادلة دائرة إذا وفقط إذا كان

$$r = \sqrt{a^2 + b^2 - c}$$



حدد (E) مجموعة النقط (M(x;y)) حيث

حدد (E') مجموعة النقط (M(x;y)) حيث

## 3- معادلة معرف لأحد أقطارها

لتكن (C) دائرة أحد أقطارها  $[AB]$  حيث

$$A(x_A; y_A) \text{ و } B(x_B; y_B)$$

$$M(x; y) \in (C) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - x_A)(x - x_B) + (y - y_A)(y - y_B) = 0$$

## برهنة

ليكن  $A$  و  $B$  نقطتين مختلفتين مجموعتهن  $M$  هي الدائرة  $(C)$  التي أحد أقطارها  $[AB]$  حيث  $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM} = 0$  في مستوى منسوب إلى معلم متعامد ممنظم، معادلة الدائرة  $(C)$  التي أحد أقطارها  $[AB]$  هي

$$(x - x_A)(x - x_B) + (y - y_A)(y - y_B) = 0$$

## تمرين

في مستوى منسوب إلى معلم متعامد ممنظم، نعتبر  $A(-1; 2)$  و  $B(-5; 4)$  و  $C(-3; 6)$

1- حدد الدائرة  $(C)$  التي أحد أقطارها  $[AB]$

2- أ- تأكد أن النقط  $A$  و  $B$  و  $C$  غير مستقيمية

ب- حدد معادلة للدائرة المحيطة بالمثلث  $ABC$

## 4- تمثيل بارامטרי لدائرة

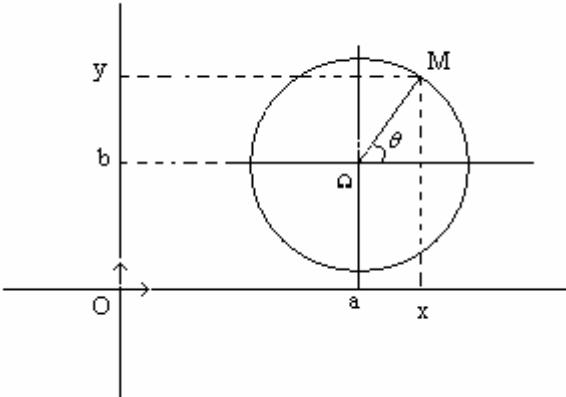
في مستوى منسوب إلى معلم متعامد ممنظم، نعتبر  $(C)$  دائرة مركزها  $\Omega(a; b)$  وشعاعها غير منعدم  $r$

$$M(x; y) \in (C) \Leftrightarrow (x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

$$\Leftrightarrow \left( \frac{x - a}{r} \right)^2 + \left( \frac{y - b}{r} \right)^2 = 1$$

ومنه يوجد عدد حقيقي  $\theta$  من  $[0; 2\pi]$  حيث

$$\begin{cases} \frac{x - a}{r} = \cos \theta \\ \frac{y - b}{r} = \sin \theta \end{cases}$$



$$M(x; y) \in (C) \Leftrightarrow \exists \theta \in \mathbb{R} / \begin{cases} x = a + r \cos \theta \\ y = b + r \sin \theta \end{cases}$$

## برهنة وتعريف

مستوى منسوب إلى معلم متعامد ممنظم، الدائرة  $(C)$  التي مركزها  $\Omega(a; b)$  وشعاعها  $r$  هي مجموعة النقط  $M(x; y)$  التي

$$\begin{cases} x = a + r \cos \theta \\ y = b + r \sin \theta \end{cases} \quad \theta \in \mathbb{R} \quad \text{تحقق}$$

تسمى تمثيلا بارامטרי لدائرة  $(C)$  التي مركزها  $\Omega(a; b)$  وشعاعها  $r$  النقطة

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases} \quad \theta \in \mathbb{R}$$

التمثيل البارامטרי للدائرة مركزها أصل المعلم وشعاعها  $r$  هي

## حالة خاصة

### تمرين

حدد تمثيلا بارامتريا للدائرة  $(C)$  المعرفة بالمعادلة

## 5- داخل وخارج دائرة

في مستوى منسوب إلى معلم متعامد ممنظم، نعتبر  $(C)$  دائرة مركزها  $\Omega(a; b)$  وشعاعها  $r$

$$c = a^2 + b^2 - r^2$$

$$\Omega M = r \Leftrightarrow M(x; y) \in (C)$$

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0 \Leftrightarrow$$

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c < 0 \Leftrightarrow$$

## خاصية

في مستوى منسوب إلى معلم متعمد ممنظم. تعتبر  $(C)$  دائرة معادلتها  $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c < 0$$

- داخلي دائرة  $(C)$  هو مجموعة النقط  $M(x; y)$  التي تحقق

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c > 0$$

- خارجي دائرة  $(C)$  هو مجموعة النقط  $M(x; y)$  التي تحقق

## تمرين

حل مبيانا

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1 < 0 \\ x + y + 1 \geq 0 \end{cases}$$

$$(x^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1) \leq 0$$

## II- تقاطع مستقيم ودائرة

### 1- مبرهنة

ليكن  $(D)$  مستقيم و  $(C)$  دائرة مركزها  $\Omega$  و شعاعها  $r$

\* إذا كان  $(D) \cap (C) = \emptyset$  فان  $d(\Omega; (D)) > r$

\* إذا كان  $(D) \cap (C) = r$  فان  $d(\Omega; (D)) = r$  أحادية

\* إذا كان  $d(\Omega; (D)) < r$  فان  $(D) \cap (C)$  يتقاطعان في نقطتين مختلفتين.

## تمرين

أدرس تقاطع دائرة  $(C)$  و المستقيم  $(D)$  في الحالات التالية

$$(D) : x + 2y - 1 = 0 \quad (C) = C(\Omega(1; -2); 2) \quad -1$$

$$(D) : 3x + 4y - 6 = 0 \quad (C) : x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1 = 0 \quad -2$$

$$(D) : 3x + 4y - 5 = 0 \quad (C) : x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1 = 0 \quad -3$$

## 2- المماس للدائرة

### a- تعريف

لتكن  $(C)$  دائرة مركزها  $\Omega$

$(D)$  مماس للدائرة  $(C)$  إذا وفقط إذا كان  $r = d(\Omega; (D))$

## ملاحظة

لتكن  $A$  نقطة من المستوى

إذا كان  $A$  داخلي دائرة  $(C)$  فانه لا يوجد أي مماس لها مار من  $A$

إذا كان  $A \in (C)$  فانه يوجد مماس وحيد له  $(C)$  مار من  $A$

إذا كان  $A$  خارجي دائرة  $(C)$  فانه يوجد مماسان لها ماران من  $A$

### b- المماس للدائرة عند أحد نقطها

#### أ- تعريف

لتكن  $(C)$  دائرة مركزها  $\Omega$  و  $A$  نقطة منها

تقول إن المستقيم  $(D)$  مماس للدائرة  $(C)$  عند النقطة  $A$  إذا وفقط إذا كان  $(D)$  عموديا على  $(\Omega A)$  في  $A$ .

## b- خاصية

لتكن  $(C)$  دائرة مركزها  $\Omega$  و شعاعها  $r$  و  $A$  نقطة منها

لتكن  $M$  نقطة من  $(D)$

$$\overrightarrow{\Omega A} \cdot \overrightarrow{MA} = 0 \Leftrightarrow A \text{ عند } (C) \text{ مماس للدائرة } (D)$$

$$\overrightarrow{\Omega M} \cdot \overrightarrow{\Omega A} = r^2 \Leftrightarrow$$

**خاصية**

لتكن  $(C)$  دائرة مركزها  $\Omega$  وشعاعها  $r$  و  $A$  نقطة منها

$\forall M \in (D) \quad \overrightarrow{\Omega M} \cdot \overrightarrow{\Omega A} = r^2$   $(D)$  مماس للدائرة  $(C)$  عند النقطة  $A$  اذا وفقط اذا كان

## ج- معادلة المماس عند أحد نقطها

ليكن  $(D)$  مماس للدائرة  $(C)$  مركزها  $\Omega$  وشعاعها  $r$  عند النقطة  $A(x_0; y_0)$

لتكن  $M(x; y)$

$$M \in (D) \Leftrightarrow \overrightarrow{\Omega M} \cdot \overrightarrow{\Omega A} = r^2$$

$$M \in (D) \Leftrightarrow (x - a)(x - x_0) + (y - b)(y - y_0) = r^2$$

$$\Leftrightarrow xx_0 + yy_0 - a(x + x_0) - b(y + y_0) + c = 0$$

$$c = a^2 + b^2 - r^2$$

حيث

**خاصية**

في مستوى منسوب إلى معلم متعمد ممنظم. إذا كانت  $(C)$  دائرة معادلتها  $0 = x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c$

فإن معادلة المماس لها عند  $A(x_0; y_0)$  هي  $xx_0 + yy_0 - a(x + x_0) - b(y + y_0) + c = 0$

**ملاحظة**

معادلة المماس لدائرة مركزها أصل المعلم وشعاعها  $r$  عند النقطة  $A(x_0; y_0)$  هي  $0 = xx_0 + yy_0 - r^2$

**تمرين**

نعتبر الدائرة  $(C): x^2 + y^2 - x - 2y = 0$

تأكد أن  $A(1; 2) \in (C)$  عند  $A$  حدد معادلة للمماس لـ  $(C)$

**تمرين**

في مستوى منسوب إلى معلم متعمد ممنظم . نعتبر الدائرة  $(C)$

التي معادلتها  $0 = x^2 + y^2 + 2x - 2y - 2 = 0$

-1 - حدد مركز وشعاع  $(C)$

-2 - حدد موضع  $A(2; 3)$  بالنسبة للدائرة  $(C)$

-3 - حدد جميع المماسات للدائرة  $(C)$  المارة من  $A$