

ملخص درس المرجح

I. مرجح نقطتين متزنتين

1.1. نقطة متزنة

لتكن A نقطة من المستوى و a عددا حقيقيا

الزوج $(A; a)$ يسمى نقطة متزنة و العدد a يسمى وزن النقطة A (نقول كذلك أن النقطة A معينة بالمعامل a).

1.2. خاصية وتعريف

لتكن $(A; a)$ و $(B; b)$ نقطتين متزنتين من المستوى بحيث $a + b \neq 0$

توجد نقطة وحيدة G من المستوى بحيث : $a\overrightarrow{GA} + b\overrightarrow{GB} = \vec{0}$

النقطة G تسمى مرجح النقطتين المتزنتين $(A; a)$ و $(B; b)$

ملاحظة 1: إذا كانت $a + b = 0$ فإن النقطتين المتزنتين $(A; a)$ و $(B; b)$ ليس لهم مرجح

ملاحظة 2: إذا كانت النقطة G مرجح النقطتين المتزنتين $(A; a)$ و $(B; b)$

فان : $\overrightarrow{AG} = \frac{b}{a+b} \overrightarrow{AB}$ ① وهذه الكتابة تستعمل لرسم النقطة G

تمرين 1:

1. أنشئ G مرجح النقطتين $(A; -2)$ و $(B; 3)$ ثم أنشئ G' مرجح النقطتين $(A; 2)$ و $(B; 1)$

2. أحسب $\overrightarrow{GG'}$ بدلالة $\overrightarrow{AB}$

الاجوبة: 1) لدينا G مرجح النقطتين $(A; -2)$ و $(B; 3)$ باستعمال العلاقة ① نجد :

$$\text{② } \overrightarrow{AG} = 3\overrightarrow{AB} \text{ يعني } \overrightarrow{AG} = \frac{3}{(-2)+3} \overrightarrow{AB}$$

ولدينا G' مرجح النقطتين $(A; 2)$ و $(B; 1)$ وباستعمال العلاقة ① نجد $\overrightarrow{AG'} = \frac{1}{1+2} \overrightarrow{AB}$ يعني $\overrightarrow{AG'} = \frac{1}{3} \overrightarrow{AB}$ ③



$$\text{② (اذن) : } \overrightarrow{GG'} = \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AG'} = -\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{AG'} = -3\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} = \left(-3 + \frac{1}{3}\right)\overrightarrow{AB} = -\frac{8}{3}\overrightarrow{AB}$$

II. خاصيات مرجح نقطتين متزنتين

(أ) الصمود

مرجح نقطتين متزنتين لا يتغير بضرب معامليهما في عدد حقيقي غير منعدم: يعني: إذا كان G مرجح النقطتين المتزنتين $(A; a)$ و $(B; b)$

فان لكل k من $\mathbb{R}^*$ فان G هو كذلك مرجح النقطتين المتزنتين $(A; ka)$ و $(B; kb)$

(ب) الخاصية المميزة

لتكن $(A; a)$ و $(B; b)$ نقطتين متزنتين من المستوى بحيث $a + b \neq 0$

ولتكن G نقطة من المستوى

G مرجح النقطتين المتزنتين $(A; a)$ و $(B; b)$ إذا وفقط إذا لكل نقطة M من المستوى : $a\overrightarrow{MA} + b\overrightarrow{MB} = (a+b)\overrightarrow{MG}$

البرهان : لتكن M نقطة من المستوى $(A; a)$

استنتاج : بوضع : $M = A$ (على التوالي $M = B$) في الخاصية المميزة نحصل على : $\overrightarrow{AG} = \frac{b}{a+b} \overrightarrow{AB}$

(على التوالي $\overrightarrow{BG} = \frac{a}{a+b} \overrightarrow{BA}$) وهذه الكتابات تمكننا من رسم النقطة G وتبين لنا أن : A و B و G نقط مستقيمة.

III. إحداثيتي المرجح:

المستوى منسوب إلى معلم $(O; \vec{i}, \vec{j})$ و لتكن $(A; a)$ و $(B; b)$ نقطتين متزنتين من المستوى

$$\begin{cases} x_G = \frac{ax_A + bx_B}{a+b} \\ y_G = \frac{ay_A + by_B}{a+b} \end{cases} \text{ : فان إحداثيتي } G \text{ هما :}$$

ملاحظة : I منتصف القطعة $[AB]$ يعني I مرجح النقطتين $(A;1)$ و $(B;1)$

مثال: نعتبر النقطتين : $A(1;2)$ و $B(-4;6)$ وليكن G مرجح النقطتين المتزنتين $(A;2)$ و $(B;-1)$

أحسب إحداثيتي G

الجواب: إذن : $G(6;-2)$
$$\begin{cases} x_G = \frac{2 \times 1 + (-1) \times (-4)}{2 + (-1)} = \frac{6}{1} = 6 \\ y_G = \frac{2 \times 2 + (-1) \times 6}{2 + (-1)} = \frac{-2}{1} = -2 \end{cases}$$

IV. مرجح ثلاث نقط متزنة:

خاصية و تعريف: لتكن $(A;a)$ و $(B;b)$ و $(C;c)$ ثلاث نقط متزنة من المستوى بحيث $a+b+c \neq 0$

توجد نقطة وحيدة G من المستوى بحيث : $a\vec{GA} + b\vec{GB} + c\vec{GC} = \vec{0}$

النقطة G تسمى مرجح النقط المتزنة $(A;a)$ و $(B;b)$ و $(C;c)$

حالة خاصة: إذا كان : $a=b=c$ فإن مرجح النقط المتزنة $(A;a)$ و $(B;b)$ و $(C;c)$ يسمى كذلك مركز ثقل المثلث ABC

V. خاصيات مرجح ثلاث نقط متزنة

(أ) الصمود: إذا كان G مرجح النقط المتزنة $(A;a)$ و $(B;b)$ و $(C;c)$ فإن لكل k من $\mathbb{R}^*$ هي كذلك مرجح النقط المتزنة :

$(A;ka)$ و $(B;kb)$ و $(C;kc)$

(ب) الخاصية المميزة: لتكن $(A;a)$ و $(B;b)$ و $(C;c)$ ثلاث نقط من المستوى بحيث $a+b+c \neq 0$ ولتكن G نقطة من المستوى

G مرجح النقط المتزنة $(A;a)$ و $(B;b)$ و $(C;c)$ إذا وفقط إذا لكل نقطة M من المستوى : $a\vec{MA} + b\vec{MB} + c\vec{MC} = (a+b+c)\vec{MG}$

استنتاج: بوضع : $M=A$ في الخاصية المميزة نحصل على : $\vec{AG} = \frac{b}{a+b+c}\vec{AB} + \frac{c}{a+b+c}\vec{AC}$ وهذه العلاقة تمكننا من رسم النقطة G

مثال: ليكن ABC مثلثا و G نقطة بحيث : $2\vec{AC} = 3\vec{AG} - \vec{GB}$

بين أن : G مرجح النقط المتزنة $(A;1)$ و $(B;1)$ و $(C;2)$

و أنشئ النقطة G

الجواب: $2\vec{AC} = 3\vec{AG} - \vec{GB}$ يعني $2\vec{AC} - 3\vec{AG} + \vec{GB} = \vec{0}$

يعني $2(\vec{AG} + \vec{GC}) - 3\vec{AG} + \vec{GB} = \vec{0}$ يعني $-\vec{AG} + \vec{GB} + 2\vec{GC} = \vec{0}$ يعني $\vec{GA} + \vec{GB} + 2\vec{GC} = \vec{0}$

ومنه : G مرجح النقط المتزنة $(A;1)$ و $(B;1)$ و $(C;2)$

وحسب العلاقة ⑧ فإن : $\vec{AG} = \frac{b}{a+b+c}\vec{AB} + \frac{c}{a+b+c}\vec{AC}$

أي : $\vec{AG} = \frac{1}{4}\vec{AB} + \frac{2}{4}\vec{AC}$ يعني $\vec{AG} = \frac{1}{4}\vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{AC}$ ومنه رسم G

(ج) تجميعية المرجح:

تكن $(A;a)$ و $(B;b)$ و $(C;c)$ ثلاث نقط من المستوى بحيث $a+b+c \neq 0$ و $a+b \neq 0$

إذا كان G مرجح النقط المتزنة $(A;a)$ و $(B;b)$ و $(C;c)$ وكانت H مرجح النقطتين المتزنتين $(A;a)$ و $(B;b)$

فإن G مرجح $(H;a+b)$ و $(C;c)$

مثال: ليكن G مركز ثقل المثلث ABC و I منتصف القطعة $[BC]$ بين أن G مرجح النقطتين $(A;1)$ و $(I;2)$

الجواب: G مركز ثقل المثلث ABC يعني G مرجح النقط المتزنة $(A;1)$ و $(B;1)$ و $(C;1)$

I منتصف القطعة $[BC]$ يعني : I مرجح النقطتين $(B;1)$ و $(C;1)$

وحسب خاصية تجميعية المرجح فإن : G هو مرجح النقطتين : $(A;1)$ و $(I;1+1)$

VI. إحداثيتا مرجح ثلاث نقط

إذا كان G مرجح النقط المتزنة $(A;a)$ و $(B;b)$ و $(C;c)$ فإن إحداثيتي G هما :

$$\begin{cases} x_G = \frac{ax_A + bx_B + cx_C}{a+b+c} \\ y_G = \frac{ay_A + by_B + cy_C}{a+b+c} \end{cases}$$