

حلول مقترحة

تمرين 1

$u_3 = \frac{2}{5}u_2 + 1$ $u_3 = \frac{86}{125} + 1 = \frac{211}{125}$	$u_2 = \frac{2}{5}u_1 + 1$ $u_2 = \frac{18}{25} + 1 = \frac{43}{25}$	$u_1 = \frac{2}{5}u_0 + 1$ $u_1 = \frac{4}{5} + 1 = \frac{9}{5}$	$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{2}{5}u_n + 1 \end{cases}$
--	---	---	---

تمرين 2

$u_3 = 1 + \frac{1}{u_2}$ $u_3 = 1 + \frac{2}{3} = \frac{5}{3}$	$u_2 = 1 + \frac{1}{u_1}$ $u_2 = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$	$u_1 = 1 + \frac{1}{u_0}$ $u_1 = 1 + 1 = 2$	$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = 1 + \frac{1}{u_n} \end{cases}$
--	--	--	--

⚡ : لاحظ أن حساب u_3 يرجع إلى حساب u_2 و u_1 و u_0 بالضرورة ، و لذلك تسمى مثل هذه المتتاليات بالترجعية.

تمرين 3

$u_3 = 2u_2 - 1$ $u_3 = 26 - 1 = 25$	$u_2 = 2u_1 - 1$ $u_2 = 14 - 1 = 13$	$u_1 = 2u_0 - 1$ $u_1 = 8 - 1 = 7$	$u_0 = 4$	1
$v_3 = 3 \times 2^3 + 1$ $v_3 = 24 + 1 = 25$	$v_2 = 3 \times 2^2 + 1$ $v_2 = 12 + 1 = 13$	$v_1 = 3 \times 2^1 + 1$ $v_1 = 6 + 1 = 7$	$v_0 = 3 \times 2^0 + 1$ $v_0 = 3 + 1 = 4$	1
2 لنبين بالترجع أن : $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = 3 \times 2^n + 1$ بالنسبة لـ $n = 0$ ، لدينا : $u_0 = 4$ و $3 \times 2^0 + 1 = 3 + 1 = 4$ منه : $u_0 = 3 \times 2^0 + 1$ نفترض أن : $u_n = 3 \times 2^n + 1$ و نبين أن : $u_{n+1} = 3 \times 2^{n+1} + 1$ لدينا : $u_{n+1} = 2u_n - 1 = 2(3 \times 2^n + 1) - 1 = 2 \times 3 \times 2^n + 2 - 1 = 3 \times 2^{n+1} + 1$				
⚡ : لاحظ أن نتيجة السؤال الأخير تعني أننا نستطيع إيجاد تعبير مباشر لبعض المتتاليات الترجعية ، مما يسمح بحساب حدودها دون ضرورة حساب الحدود التي تسبقها .				

تمرين 4

$u_3 = 3u_2 - 4$ $u_3 = 87 - 4 = 83$	$u_2 = 3u_1 - 4$ $u_2 = 33 - 4 = 29$	$u_1 = 3u_0 - 4$ $u_1 = 15 - 4 = 11$	$\begin{cases} u_0 = 5 \\ u_{n+1} = 3u_n - 4 \end{cases}$	1
2 لنبين بالترجع أن $u_n > 2$ $\forall n \in \mathbb{N}$ بالنسبة لـ $n = 0$ ، لدينا : $u_0 = 5$ منه : $u_0 > 2$ نفترض أن : $u_n > 2$ و نبين أن : $u_{n+1} > 2$ لدينا : $u_n > 2 \Rightarrow 3u_n > 6 \Rightarrow 3u_n - 4 > 6 - 4 \Rightarrow u_{n+1} > 2$				
3 لدينا : $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} - u_n = 3u_n - 4 - u_n = 2u_n - 4 = 2(u_n - 2) > 0$ إذن (u_n) تزايدية				
⚡ : لاحظ أننا استعملنا السؤال الثاني لدراسة رتبة المتتالية و هذا الأمر يكون ضروريا في أغلب المتتاليات.				

تمرين 5

$\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = \frac{1}{2} \left(u_n + \frac{4}{u_n} \right) \end{cases}$	1
لنبين بالترجع أن $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \geq 2$ بالنسبة لـ $n=0$ ، لدينا : $u_0 = 3$ منه : $u_0 \geq 2$ نفترض أن : $u_n \geq 2$ و نبين أن : $u_{n+1} \geq 2$ لدينا : $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2} \left(u_n + \frac{4}{u_n} \right) - u_n = \frac{u_n^2 + 4}{2u_n} - u_n = \frac{u_n^2 + 4 - 2u_n^2}{2u_n} = \frac{4 - u_n^2}{2u_n} = \frac{(2 + u_n)(2 - u_n)}{2u_n}$ و بما أن $u_n \geq 2$ (حسب الافتراض) فإن $2 - u_n \leq 0$ و $2 + u_n > 0$ و $2u_n > 0$ و منه : $u_{n+1} - u_n \leq 0$ و بالتالي : (u_n) تناقصية	2
⚡ : لاحظ أننا استعملنا طريقة مغايرة للطريقة السابقة ، لأن التأطير المباشر لا يؤدي للنتيجة المطلوبة.	

تمرين 6

$\begin{cases} u_0 = 4 \\ u_{n+1} = \frac{2u_n^2 - 3}{u_n + 2} \end{cases}$	
لدينا $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} - 3 = \frac{2u_n^2 - 3}{u_n + 2} - 3 = \frac{2u_n^2 - 3 - 3(u_n + 2)}{u_n + 2} = \frac{2u_n^2 - 3 - 3u_n - 6}{u_n + 2} = \frac{2u_n^2 - 3u_n - 9}{u_n + 2}$ و بما أن : $\forall n \in \mathbb{N} \quad (u_n - 3)(2u_n + 3) = 2u_n^2 + 3u_n - 6u_n - 9 = 2u_n^2 - 3u_n - 9$ فإن : $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} - 3 = \frac{(u_n - 3)(2u_n + 3)}{u_n + 2}$	1
لنبين بالترجع أن $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \geq 3$ بالنسبة لـ $n=0$ ، لدينا : $u_0 = 4$ منه : $u_0 \geq 3$ نفترض أن : $u_n \geq 3$ و نبين أن : $u_{n+1} \geq 3$ و بما أن $u_n \geq 3$ (حسب الافتراض) فإن $u_n - 3 \geq 0$ و $2u_n + 3 > 0$ و $u_n + 2 > 0$ إذن حسب السؤال السابق $u_{n+1} - 3 \geq 0$ و بالتالي : و منه : $u_{n+1} \geq 3$	ب
لدينا $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} - u_n = \frac{2u_n^2 - 3}{u_n + 2} - u_n = \frac{2u_n^2 - 3 - u_n(u_n + 2)}{u_n + 2} = \frac{2u_n^2 - 3 - u_n^2 - 2u_n}{u_n + 2} = \frac{u_n^2 - 2u_n - 3}{u_n + 2}$ و بما أن : $\forall n \in \mathbb{N} \quad (u_n - 3)(u_n + 1) = u_n^2 + u_n - 3u_n - 3 = u_n^2 - 2u_n - 3$ فإن : $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} - u_n = \frac{(u_n - 3)(u_n + 1)}{u_n + 2}$	2
بما أن $u_n \geq 3$ فإن : $u_n - 3 \geq 0$ و $u_n + 1 > 0$ و $u_n + 2 > 0$ و منه : $u_{n+1} - u_n \geq 0$ و بالتالي : (u_n) تزايدية	ب
⚡ : لاحظ تقنية استعمال الفرق جد مهمة، لكن يمكن البرهان مباشرة في بعض الحالات كما هو الشأن في التمرين 4	

تمرين 7

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \sqrt{2u_n + 8} \end{cases}$$

لنبين بالترجع أن $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \leq 4$

بالنسبة لـ $n = 0$ ، لدينا : $u_0 = 1$ منه : $u_0 \leq 4$

نفترض أن : $u_n \leq 4$ ونبين أن : $u_{n+1} \leq 4$

لدينا : $u_n \leq 4 \Rightarrow 2u_n \leq 8 \Rightarrow 2u_n + 8 \leq 16 \Rightarrow 2u_n + 8 \leq \sqrt{16} \Rightarrow u_{n+1} \leq 4$

يمكن أيضا استعمال تقنية الفرق، لكن يجب استعمال المرافق، كما يلي:

$$u_{n+1} - 4 = \sqrt{2u_n + 8} - 4 = \frac{2u_n + 8 - 16}{\sqrt{2u_n + 8} + 4} = \frac{2(u_n - 4)}{\sqrt{2u_n + 8} + 4} \leq 0$$

تمرين 8

لندرس رتبة المتتاليات التالية

$$n \in \mathbb{N} \quad \text{لدينا لكل} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = \frac{2n}{n+1}$$

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{2(n+1)}{n+2} - \frac{2n}{n+1} = 2 \left(\frac{n+1}{n+2} - \frac{n}{n+1} \right) = 2 \frac{(n+1)^2 - n(n+2)}{(n+1)(n+2)} = 2 \frac{n^2 + 2n + 1 - n^2 - 2n}{(n+1)(n+2)} \\ &= 2 \frac{1}{(n+1)(n+2)} > 0 \end{aligned}$$

إذن (u_n) **تزايدية**

$$n \in \mathbb{N}^* \quad \text{لدينا لكل} \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \quad v_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$$

$$v_{n+1} - v_n = \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} \right) - \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} \right) = \frac{1}{n+1} > 0$$

إذن (v_n) **تزايدية**

$$n \in \mathbb{N} \quad \text{لدينا لكل} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad w_n = \frac{n+1}{3^n}$$

$$w_{n+1} - w_n = \frac{n+2}{3^{n+1}} - \frac{n+1}{3^n} = \frac{n+2-3(n+1)}{3^{n+1}} = \frac{n+2-3n-3}{3^{n+1}} = \frac{-2n-1}{3^{n+1}} < 0$$

إذن (w_n) **تناقصية**

$$n \in \mathbb{N}^* \quad \text{لدينا لكل} \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \quad w_n = n^3 - n$$

$$w_{n+1} - w_n = (n+1)^3 - (n+1) - (n^3 - n) = n^3 + 3n^2 + 3n + 1 - n - 1 - n^3 + n = 3n^2 + 3n > 0$$

إذن (w_n) **تزايدية**

$$u_{n+1} - u_n = u_n^2 - u_n + 1 - u_n = u_n^2 - 2u_n + 1 = (u_n - 1)^2 \geq 0 \quad , \quad n \in \mathbb{N} \quad \text{لدينا لكل} \quad \begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = u_n^2 - u_n + 1 \end{cases}$$

إذن (u_n) **تزايدية**

تمرين 9

(u_n) متتالية حسابية حدها الأول $u_0 = 2$ و أساسها $r = 3$	
1	لدينا : $u_7 = u_0 + 7r = 2 + 21 = 23$ و $u_{11} = u_0 + 11r = 2 + 33 = 35$
2	$S = u_0 + u_1 + \dots + u_{99} = \frac{u_0 + u_{99}}{2} \times 100 = 100 \times \frac{2 + u_0 + 99r}{2} = 50(2 + 2 + 297) = 50 \times 301 = 15050$
100 : تمثل عدد الحدود $(99 - 0 + 1 = 100)$	

تمرين 10

(u_n) متتالية حسابية حدها الأول $u_0 = -1$	
1	نعلم أن : $u_{10} = u_0 + 10r$ منه : $u_{10} - u_0 = 10r$ منه : $r = \frac{u_{10} - u_0}{10} = \frac{59 - (-1)}{10} = \frac{60}{10} = 6$
2	$S = u_3 + u_4 + \dots + u_{22} = \frac{u_3 + u_{22}}{2} \times 20 = 20 \times \frac{u_0 + 3r + u_0 + 22r}{2} = 10(-1 + 18 - 1 + 132) = 10 \times 148 = 1480$
20 : تمثل عدد الحدود $(22 - 3 + 1 = 20)$	

تمرين 11

(u_n) متتالية حسابية حدها الأول u_0 و أساسها r	
1	نعلم أن : $u_3 = u_0 + 3r$ منه : $u_0 + 3r = 12$ و نعلم أن : $u_{17} = u_0 + 17r$ منه : $u_0 + 17r = 82$ نحصل على النظام : $\begin{cases} u_0 + 3r = 12 \\ u_0 + 17r = 82 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_0 = 12 - 3r \\ 12 - 3r + 17r = 82 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_0 = 12 - 3r \\ 14r = 82 - 12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_0 = 12 - 3 \times 5 \\ r = \frac{70}{14} = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_0 = -3 \\ r = 5 \end{cases}$
2	$S = u_0 + u_4 + \dots + u_n = \frac{u_0 + u_n}{2} \times (n+1) = (n+1) \times \frac{u_0 + u_0 + rn}{2} = (n+1) \times \frac{-3 - 3 + 5n}{2} = \frac{(n+1)(5n-6)}{2}$
$n+1$: تمثل عدد الحدود $(n - 0 + 1 = n+1)$	

تمرين 12

(u_n) متتالية هندسية حدها الأول $u_0 = 3$ و أساسها $r = 2$	
1	لدينا : $u_3 = u_0 \times r^3 = 3 \times 2^3 = 3 \times 8 = 24$ و $u_6 = u_0 \times r^6 = 3 \times 2^6 = 3 \times 64 = 192$
2	$S = u_0 + u_1 + \dots + u_5 = u_0 \times \frac{1 - r^6}{1 - r} = 3 \times \frac{1 - 2^6}{1 - 2} = 3 \times \frac{1 - 64}{-1} = 3 \times 63 = 189$
u_0 : تمثل أول حدود المجموع S و 6 تمثل عدد الحدود $(5 - 0 + 1 = 6)$	

تمرين 13

$r = \frac{1}{2}$ هندسية أساسها (u_n)	
1	لدينا : $u_3 = u_0 \times r^3$ منه $u_0 = \frac{u_3}{r^3} = \frac{\frac{5}{8}}{\left(\frac{1}{2}\right)^3} = \frac{\frac{5}{8}}{\frac{1}{8}} = 5$
2	$S = u_1 + u_2 + \dots + u_n = u_1 \times \frac{1-r^n}{1-r} = (u_0 \times r^1) \times \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}} = 5 \times \frac{1}{2} \times \frac{1-\frac{1}{2^n}}{\frac{1}{2}} = 5\left(1-\frac{1}{2^n}\right)$
: u_1 تمثل أول حدود المجموع S و n عدد الحدود $(n-1+1=n)$	

تمرين 14

$v_n = \frac{1}{u_n - 3}$ و $\begin{cases} u_0 = -1 \\ u_{n+1} = \frac{9}{6 - u_n} \end{cases}$	
1	لدينا : $v_{n+1} - v_n = \frac{1}{u_{n+1} - 3} - \frac{1}{u_n - 3} = \frac{1}{\frac{9}{6 - u_n} - 3} - \frac{1}{u_n - 3} = \frac{1}{\frac{9 - 3(6 - u_n)}{6 - u_n}} - \frac{1}{u_n - 3} = \frac{6 - u_n}{9 - 18 + 3u_n} - \frac{1}{u_n - 3} = \frac{6 - u_n}{3(-3 + u_n)} - \frac{3}{3(u_n - 3)} = \frac{6 - u_n - 3}{3(u_n - 3)} = \frac{3 - u_n}{3(u_n - 3)} = \frac{1}{3}$ بالتالي (v_n) متتالية حسابية أساسها $r = \frac{1}{3}$ و حدّها الأول $v_0 = \frac{1}{u_0 - 3} = \frac{1}{-4} = -\frac{1}{4}$
2	$v_n = v_0 + r n = -\frac{1}{4} + \frac{1}{3} n = \frac{4n - 3}{12}$
3	لدينا : $v_n = \frac{1}{u_n - 3}$ منه : $u_n - 3 = \frac{1}{v_n}$ منه : $u_n = \frac{1}{v_n} + 3 = \frac{12}{4n - 3} + 3 = \frac{12 + 12n - 9}{4n - 3} = \frac{12n + 3}{4n - 3}$
4	$S = v_0 + v_2 + \dots + v_6 = \frac{v_0 + v_6}{2} \times 7 = \frac{-\frac{1}{4} + \frac{4 \times 6 - 3}{12}}{2} \times 7 = \frac{-\frac{3}{4} + \frac{24 - 3}{12}}{2} \times 7 = \frac{\frac{-3 + 24 - 3}{12}}{2} \times 7 = \frac{\frac{18}{12}}{2} \times 7 = \frac{18}{24} \times 7 = \frac{3}{4} \times 7 = \frac{21}{4}$

تمرين 15

$v_n = u_n - \frac{5}{3} \quad \text{و} \quad \begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{2}{5} u_n + 1 \quad n \geq 0 \end{cases}$			
لدينا : $v_{n+1} = u_{n+1} - \frac{5}{3} = \frac{2}{5} u_n + 1 - \frac{5}{3} = \frac{2}{5} u_n - \frac{2}{3} = \frac{2}{5} \left(v_n + \frac{5}{3} \right) - \frac{2}{3} = \frac{2}{5} v_n + \frac{2}{3} - \frac{2}{3} = \frac{2}{5} v_n$ إذن (v_n) متتالية هندسية أساسها $q = \frac{2}{5}$ و حدها الأول $v_0 = u_0 - \frac{5}{3} = 2 - \frac{5}{3} = \frac{1}{3}$			1
$v_n = v_0 \times q^n = \frac{1}{3} \left(\frac{2}{5} \right)^n$ ولدينا : $v_n = u_n - \frac{5}{3}$ منه : $u_n = v_n + \frac{5}{3} = \frac{1}{3} \left(\frac{2}{5} \right)^n + \frac{5}{3}$			2
$S = v_0 + v_1 + \dots + v_{n-1} = v_0 \times \frac{1 - q^n}{1 - q} = \frac{1}{3} \times \frac{1 - \left(\frac{2}{5} \right)^n}{1 - \frac{2}{5}} = \frac{1}{3} \times \frac{1 - \left(\frac{2}{5} \right)^n}{\frac{3}{5}} = \frac{5}{9} \left(1 - \left(\frac{2}{5} \right)^n \right)$			3

تمرين 16

$v_n = u_{n+1} - u_n \quad \text{و} \quad \begin{cases} u_0 = 1, u_1 = 4 \\ u_{n+2} = \frac{3}{2} u_{n+1} - \frac{1}{2} u_n \end{cases}$				
$v_1 = u_2 - u_1 = \frac{11}{2} - 4 = \frac{3}{2}$	$v_0 = u_1 - u_0 = 4 - 1 = 3$	$u_3 = \frac{3}{2} u_2 - \frac{1}{2} u_1 = \frac{33}{4} - \frac{4}{2} = \frac{25}{4}$	$u_2 = \frac{3}{2} u_1 - \frac{1}{2} u_0 = \frac{12}{2} - \frac{1}{2} = \frac{11}{2}$	1
$v_{n+1} = u_{n+2} - u_{n+1} = \frac{3}{2} u_{n+1} - \frac{1}{2} u_n - u_{n+1} = \frac{1}{2} u_{n+1} - \frac{1}{2} u_n = \frac{1}{2} (u_{n+1} - u_n) = \frac{1}{2} v_n$				2
إذن (v_n) متتالية هندسية أساسها $q = \frac{1}{2}$ و حدها الأول $v_0 = 3$				
لدينا $v_0 + v_1 + \dots + v_{n-1} = (u_1 - u_0) + (u_2 - u_1) + \dots + (u_n - u_{n-1}) = -u_0 + u_n = u_n - u_0$				3
لدينا حسب السؤال السابق : $u_n - u_0 = v_0 + v_1 + \dots + v_{n-1} = v_0 \times \frac{1 - q^n}{1 - q} = 3 \times \frac{1 - \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{2}} = 6 \left(1 - \frac{1}{2^n} \right)$				4
إذن : $u_n = 6 \left(1 - \frac{1}{2^n} \right) + u_0 = 6 - \frac{6}{2^n} + 1 = 7 - \frac{6}{2^n}$				
يمكنك التحقق من صحة النتيجة بتعويض n بالقيم 0 و 1 و 2 و 3 و مقارنتها بنتائج السؤال الأول				

يمكنك التحقق من صحة النتيجة بتعويض n بالقيم 0 و 1 و 2 و 3 ومقارنتها بنتائج السؤال الأول

تمرين 17

$\begin{cases} u_0 = 1, v_0 = 7 \\ u_{n+1} = \frac{2u_n + v_n}{3}; v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \end{cases}$				
$v_2 = \frac{u_1 + v_1}{2}$ $= \frac{3 + 4}{2} = \frac{7}{2}$	$u_2 = \frac{2u_1 + v_1}{3}$ $= \frac{6 + 4}{3} = \frac{10}{3}$	$v_1 = \frac{u_0 + v_0}{2}$ $= \frac{1 + 7}{2} = 4$	$u_1 = \frac{2u_0 + v_0}{3}$ $= \frac{2 + 7}{3} = 3$	1
$v_{n+1} = u_{n+2} - u_{n+1} = \frac{3}{2}u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n - u_{n+1} = \frac{1}{2}u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n = \frac{1}{2}(u_{n+1} - u_n) = \frac{1}{2}v_n$ إذن (v_n) متتالية هندسية أساسها $q = \frac{1}{2}$ وحدها الأول $v_0 = 3$				2
لدينا $v_0 + v_1 + \dots + v_{n-1} = (u_1 - u_0) + (u_2 - u_1) + \dots + (u_n - u_{n-1}) = -u_0 + u_n = u_n - u_0$				3
$u_n - u_0 = v_0 + v_1 + \dots + v_{n-1} = v_0 \times \frac{1 - q^n}{1 - q} = 3 \times \frac{1 - \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{2}} = 6 \left(1 - \frac{1}{2^n} \right)$ إذن : $u_n = 6 \left(1 - \frac{1}{2^n} \right) + u_0 = 6 - \frac{6}{2^n} + 1 = 7 - \frac{6}{2^n}$				4
يمكنك التحقق من صحة النتيجة بتعويض n بالقيم 0 و 1 و 2 و 3 ومقارنتها بنتائج السؤال الأول				

تمرين 18

$\begin{cases} u_0 = 1, v_0 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{u_n + 2v_n}{3}; v_{n+1} = \frac{u_n + 4v_n}{5} \end{cases}$			
لدينا : $w_{n+1} = v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{u_n + 4v_n}{5} - \frac{u_n + 2v_n}{3} = \frac{3u_n + 12v_n - 5u_n - 10v_n}{15} = \frac{2v_n - 2u_n}{15} = \frac{2(v_n - u_n)}{15} = \frac{2}{15} w_{n+1}$ إذن (w_n) متتالية هندسية أساسها $q = \frac{2}{5}$ وحدها الأول $w_0 = v_0 - u_0 = 2 - 1 = 1$ منه : $\forall n \in \mathbb{N} \quad w_n = w_0 \times q^n = \left(\frac{2}{5}\right)^n$			1
لدينا : $t_{n+1} = 3u_{n+1} + 10v_{n+1} = u_n + 2v_n + 2(u_n + 4v_n) = u_n + 2v_n + 2u_n + 8v_n = 3u_n + 10v_n = t_n$ إذن (t_n) متتالية ثابتة، منه : $\forall n \in \mathbb{N} \quad t_n = t_0 = 3u_0 + 10v_0 = 3 + 20 = 23$			2
لدينا حسب ما سبق : $\begin{cases} v_n - u_n = w_n \\ 3u_n + 10v_n = t_n \end{cases}$ منه : $\begin{cases} v_n = w_n + u_n \\ 3u_n + 10(w_n + u_n) = t_n \end{cases}$ منه : $\begin{cases} v_n = \frac{t_n + 3w_n}{13} \\ u_n = \frac{t_n - 10w_n}{13} \end{cases}$ منه : $\begin{cases} v_n = w_n + u_n \\ 13u_n = t_n - 10w_n \end{cases}$ منه : $\begin{cases} v_n = w_n + \frac{t_n - 10w_n}{13} \\ u_n = \frac{t_n - 10w_n}{13} \end{cases}$			3

$$\begin{cases} v_n = \frac{23 + 3\left(\frac{2}{5}\right)^n}{13} \\ u_n = \frac{23 - 10\left(\frac{2}{5}\right)^n}{13} \end{cases}$$

بالتالي :

⚡ : لاحظ أن السؤال الأخير يعتمد على حل أنظمة من الدرجة الأولى ذات المجهولين u_n و v_n واعتبار w_n و t_n معلومين لكونهما يتوفران على الصيغة العامة لكل منهما.

تمرين 19

نعلم أن : $u_6 = u_0 + 6r$ و $u_3 + u_4 + u_5 = u_0 + 3r + u_0 + 4r + u_0 + 5r = 3u_0 + 12r$

لدينا : $u_6 = -7$ و $u_3 + u_4 + u_5 = -9$

إذن نحصل على النظام : $\begin{cases} u_0 + 6r = -7 \\ 3u_0 + 12r = -9 \end{cases}$ منه : $\begin{cases} u_0 = -7 - 6r \\ 3(-7 - 6r) + 12r = -9 \end{cases}$

منه : $\begin{cases} u_0 = -7 - 6r \\ -21 - 18r + 12r = -9 \end{cases}$ منه : $\begin{cases} u_0 = -7 - 6r \\ -6r = -9 + 21 = 12 \end{cases}$ منه : $\begin{cases} u_0 = -7 + 12 = 5 \\ r = \frac{12}{-6} = -2 \end{cases}$

$$S = u_0 + u_1 + \dots + u_{100} = \frac{u_0 + u_{100}}{2} \times 101 = 101 \frac{5 + u_0 + 100r}{2} = 101 \frac{5 + 5 - 200}{2} = 101 \times \frac{-190}{2}$$

$$S = 101 \times (-95) = -9595$$

تمرين 20

$$S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_{n-1} = v_0 \times \frac{1 - r^n}{1 - r} = 3 \times \frac{1 - 2^n}{1 - 2} = 3 \frac{1 - 2^n}{-1} = 3(2^n - 1)$$

لدينا متتالية هندسية أساسها $r = 2$ منه : $v_{n+1} = 2v_n$

منه : $w_{n+1} = v_{n+1}^2 = (2v_n)^2 = 4v_n^2 = 4w_n$ إذن : (w_n) متتالية هندسية أساسها $q = 4$

لدينا :

$$T_n = v_0^2 + v_1^2 + \dots + v_{n-1}^2 = w_0 + w_1 + \dots + w_{n-1} = w_0 \frac{1 - q^n}{1 - q} = v_0^2 \frac{1 - 4^n}{1 - 4} = 9 \frac{1 - 4^n}{-3} = 9 \frac{4^n - 1}{3} = 3(4^n - 1)$$

$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{u_n}{3n+1} \end{cases}$		
$u_2 = \frac{u_1}{3+1} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$	$u_1 = \frac{u_0}{0+1} = 2$	1
بالنسبة لـ $n = 0$ ، لدينا : $u_0 = 2 > 0$ نفترض أن $u_n > 0$ لدينا : $n \geq 0$ منه : $3n+1 \geq 1 > 0$ ، إذن $\frac{u_n}{3n+1} > 0$ أي $u_{n+1} > 0$ بالتالي : $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n > 0$		2
لدينا : $u_{n+1} - u_n = \frac{u_n}{3n+1} - u_n = u_n \left(\frac{1}{3n+1} - 1 \right) = u_n \frac{1-3n-1}{3n+1} = -\frac{3nu_n}{3n+1} \leq 0$ بالتالي (u_n) متتالية تناقصية.		3
لدينا $\frac{1}{4} - \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{4} - \frac{\frac{u_n}{3n+1}}{u_n} = \frac{1}{4} - \frac{1}{3n+1} = \frac{3n+1-4}{4(3n+1)} = \frac{3n-3}{4(3n+1)} = \frac{3(n-1)}{4(3n+1)}$ إذن لكل $n \in \mathbb{N}^*$ لدينا $\frac{3(n-1)}{4(3n+1)} \geq 0$ ومنه $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{1}{4}$		أ
لدينا حسب السؤال السابق : $\frac{u_2}{u_1} \leq \frac{1}{4}$ و $\frac{u_3}{u_2} \leq \frac{1}{4}$ و ... و $\frac{u_n}{u_{n-1}} \leq \frac{1}{4}$ و بضرب هذه المتفاوتات (ذات الأطراف الموجبة) طرفا بطرف نجد أن : $\frac{u_2}{u_1} \times \frac{u_3}{u_2} \times \dots \times \frac{u_n}{u_{n-1}} \leq \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$ أي : $\frac{u_n}{u_1} \leq \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$ منه : $u_n \leq \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} u_0$ منه : $u_n \leq \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} \times 2$ منه : $u_n \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n \times 4 \times 2$ بالتالي : $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n \leq 8 \left(\frac{1}{4}\right)^n$		ب 4

$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = u_n^2 + u_n - \frac{1}{4} \end{cases}$	بالنسبة لـ $n = 0$ ، لدينا : $u_0 = 0$ منه $u_0 < \frac{1}{2}$ نفترض أن $u_n < \frac{1}{2}$ ونبين أن $u_{n+1} < \frac{1}{2}$ لدينا : $u_{n+1} = u_n^2 + u_n - \frac{1}{4} = u_n^2 + u_n + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = \left(u_n + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2}$ $ u_n < \frac{1}{2} \Rightarrow -\frac{1}{2} < u_n < \frac{1}{2} \Rightarrow 0 < u_n + \frac{1}{2} < 1 \Rightarrow 0 < \left(u_n + \frac{1}{2}\right)^2 < \frac{1}{4}$ $\Rightarrow -\frac{1}{2} < \left(u_n + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} < \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \Rightarrow -\frac{1}{2} < u_{n+1} < -\frac{1}{4} < -\frac{1}{2} \Rightarrow u_{n+1} < \frac{1}{2}$ بالتالي : $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n < \frac{1}{2}$	لدينا : $u_{n+1} - u_n = u_n^2 + u_n - \frac{1}{4} - u_n = u_n^2 - \frac{1}{4}$ بالتالي (u_n) متتالية تناقصية.	بالنسبة لـ $n = 0$ ، لدينا : $\left(u_0 + \frac{1}{2}\right)^{2^0} = \left(u_0 + \frac{1}{2}\right)^1 = u_0 + \frac{1}{2}$ نفترض أن $u_n + \frac{1}{2} = \left(u_0 + \frac{1}{2}\right)^{2^n}$ ونبين أن : $u_{n+1} + \frac{1}{2} = \left(u_0 + \frac{1}{2}\right)^{2^{n+1}}$ لدينا : $u_{n+1} + \frac{1}{2} = u_n^2 + u_n - \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = u_n^2 + u_n + \frac{1}{4} = \left(u_n + \frac{1}{2}\right)^2 = \left(\left(u_0 + \frac{1}{2}\right)^{2^n}\right)^2$ $= \left(u_0 + \frac{1}{2}\right)^{2^n \times 2} = \left(u_0 + \frac{1}{2}\right)^{2^{n+1}}$ بالتالي : $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n + \frac{1}{2} = \left(u_0 + \frac{1}{2}\right)^{2^n}$
--	---	--	---