سلسلة 4	المتتاليـــات العددية حلول مقترحة	السنة 1 بكالوريا علوم تجريبية

تمرين 1 : $u_0=1$, $v_0=2$; $v_{n+1}=\dfrac{u_n+4v_n}{5}$; $u_{n+1}=\dfrac{u_n+2v_n}{3}$ ، $w_n=v_n-u_n$ و $t_n=3u_n+10v_n$

1

لدينا :

$$w_{n+1}=v_{n+1}-u_{n+1}=\frac{u_n+4v_n}{5}-\frac{u_n+2v_n}{3}=\frac{3u_n+12v_n-5u_n-10v_n}{15}=\frac{2v_n-2u_n}{15}=\frac{2(v_n-u_n)}{15}=\frac{2}{15}w_{n+1}$$

إذن (w_n) متتالية هندسية أساسها $\boxed{q=\dfrac{2}{5}}$ و حدها الأول $\boxed{w_0=v_0-u_0=2-1=1}$

بالتالي : $\boxed{\forall n\in IN \quad w_n=w_0\times q^n=\left(\dfrac{2}{5}\right)^n}$

2

لدينا : $t_{n+1}=3u_{n+1}+10v_{n+1}=u_n+2v_n+2(u_n+4v_n)=u_n+2v_n+2u_n+8v_n=3u_n+10v_n=t_n$

إذن (w_n) متتالية ثابتة ، منه : $\boxed{\forall n\in IN \quad t_n=t_0=3u_0+10v_0=3+20=23}$

3

لدينا حسب ما سبق : $\begin{cases}v_n-u_n=w_n\\3u_n+10v_n=t_n\end{cases}$ منه : $\begin{cases}v_n=w_n+u_n\\3u_n+10(w_n+u_n)=t_n\end{cases}$ منه : $\begin{cases}v_n=w_n+u_n\\3u_n+10w_n+10u_n=t_n\end{cases}$

منه : $\begin{cases}v_n=w_n+u_n\\13u_n=t_n-10w_n\end{cases}$ منه : $\begin{cases}v_n=w_n+\dfrac{t_n-10w_n}{13}\\u_n=\dfrac{t_n-10w_n}{13}\end{cases}$ منه : $\begin{cases}v_n=\dfrac{t_n+3w_n}{13}=\dfrac{23+3\left(\frac{2}{15}\right)^n}{13}\\u_n=\dfrac{t_n-10w_n}{13}=\dfrac{23-10\left(\frac{2}{15}\right)^n}{13}\end{cases}$

لاحظ أن السؤال الأخير يعتمد على حل نظمة من الدرجة الأولى ذات المجهولين u_n و v_n واعتبار w_n و t_n معلومين لكونهما يتوفران على الصيغة العامة لكل منهما.

تمرين 2 : (u_n) متتالية حسابية ، u_0

1

نعلم أن : $u_3+u_4+u_5=u_0+3r+u_0+4r+u_0+5r=3u_0+12r$ و $u_6=u_0+6r$

لدينا : $u_3+u_4+u_5=-9$ و $u_6=-7$

إذن نحصل على النظمة : $\begin{cases}u_0+6r=-7\\3u_0+12r=-9\end{cases}$ منه : $\begin{cases}u_0=-7-6r\\3(-7-6r)+12r=-9\end{cases}$

منه : $\begin{cases}u_0=-7-6r\\-21-18r+12r=-9\end{cases}$ منه : $\begin{cases}u_0=-7-6r\\-6r=-9+21=12\end{cases}$ منه : $\boxed{\begin{cases}u_0=-7+12=5\\r=\dfrac{12}{-6}=-2\end{cases}}$

2

$$\boxed{\begin{aligned}&S=u_0+u_1+\dots+u_{100}=\frac{u_0+u_{100}}{2}\times101=101\frac{5+u_0+100r}{2}=101\frac{5+5-200}{2}=101\times\frac{-190}{2}\\&S=101\times(-95)=-9595\end{aligned}}$$

تمرين 3 : (v_n) متتالية هندسية ، $v_0=3$ ، $r=2$

1		$\boxed{S_n = v_0 + v_1 + ... + v_{n-1} = v_0 \times \frac{1-r^n}{1-r} = 3\times\frac{1-2^n}{1-2} = 3\frac{1-2^n}{-1} = 3(2^n - 1)}$
2		$w_n = v_n^2$
	أ)	لدينا متتالية هندسية أساسها $r=2$ منه : $v_{n+1} = 2\,v_n$ منه : $w_{n+1} = v_{n+1}^2 = (2\,v_n)^2 = 4\,v_n^2 = 4\,w_n$ إذن : (w_n) متتالية هندسية أساسها $q=4$
	ب)	$\boxed{T_n = v_0^2 + v_1^2 + ... + v_{n-1}^2 = w_0 + w_1 + ... + w_{n-1} = w_0\frac{1-q^n}{1-q} = v_0^2\frac{1-4^n}{1-4} = 9\frac{1-4^n}{-3} = 9\frac{4^n-1}{3} = 3(4^n - 1)}$

تمرين 4 : $u_0 = 2$; $u_{n+1} = \frac{u_n}{3n+1}$

1	$u_1 = \frac{u_0}{0+1} = 2$	$u_2 = \frac{u_1}{3+1} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

2		بالنسبة لـ $n=0$ ، لدينا : $u_0 = 2 > 0$ نفترض أن $u_n > 0$ لدينا : $n \geq 0$ منه : $3n+1 \geq 1 > 0$ ، إذن $\frac{u_n}{3n+1} > 0$ أي $u_{n+1} > 0$ بالتالي : $\boxed{\forall n \in IN \quad u_n > 0}$
3		لدينا : $u_{n+1} - u_n = \frac{u_n}{3n+1} - u_n = u_n\left(\frac{1}{3n+1} - 1\right) = u_n\frac{1-3n-1}{3n+1} = -\frac{3n\,u_n}{3n+1} \leq 0$ بالتالي (u_n) متتالية تناقصية.
4	أ)	لدينا $\frac{1}{4} - \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{4} - \frac{\frac{u_n}{3n+1}}{u_n} = \frac{1}{4} - \frac{1}{3n+1} = \frac{3n+1-4}{4(3n+1)} = \frac{3n-3}{4(3n+1)} = \frac{3(n-1)}{4(3n+1)}$ إذن لكل $n \in IN^*$ لدينا $\frac{3(n-1)}{4(3n+1)} \geq 0$ و منه $\boxed{\forall n \in IN^* \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{1}{4}}$
	ب)	لدينا حسب السؤال السابق : $\frac{u_2}{u_1} \leq \frac{1}{4}$ و $\frac{u_3}{u_2} \leq \frac{1}{4}$ و ... و $\frac{u_n}{u_{n-1}} \leq \frac{1}{4}$ و بضرب هذه المتفاوتات (ذات الأطراف الموجبة) طرفا بطرف نجد أن : $\frac{u_2}{u_1} \times \frac{u_3}{u_2} \times ... \times \frac{u_n}{u_{n-1}} \leq \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$ أي : $\frac{u_n}{u_1} \leq \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$ منه : $u_n \leq \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} u_0$ منه : $u_n \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n \times \left(\frac{1}{4}\right)^{-1} \times 2$ منه : $u_n \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n \times 4 \times 2$ بالتالي : $\boxed{\forall n \in IN^* \quad u_n \leq 8\left(\frac{1}{4}\right)^n}$

تمرين 5 : $u_0 = 0$; $u_{n+1} = u_n^2 + u_n - \frac{1}{4}$

1	بالنسبة لـ $n=0$ ، لدينا : $\lvert u_0 \rvert = 0$ منه $\lvert u_0 \rvert < \frac{1}{2}$ نفترض أن $\lvert u_n \rvert < \frac{1}{2}$ ونبين أن $\lvert u_{n+1} \rvert < \frac{1}{2}$

لدينا : $u_{n+1}=u_n^2+u_n-\frac{1}{4}=u_n^2+u_n+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}=\left(u_n+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{2}$

$$|u_n|<\frac{1}{2}\ \Rightarrow\ \frac{-1}{2}<u_n<\frac{1}{2}\ \Rightarrow\ 0<u_n+\frac{1}{2}<1\ \Rightarrow\ 0<\left(u_n+\frac{1}{2}\right)^2<\frac{1}{4}$$

$$|u_n|<\frac{1}{2}\ \Rightarrow\ \frac{-1}{2}<\left(u_n+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{2}<\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\ \Rightarrow\ \frac{-1}{2}<u_{n+1}<\frac{-1}{4}<\frac{1}{2}\Rightarrow\ |u_{n+1}|<\frac{1}{2}$$

بالتالي : $\boxed{\forall n\in IN\ \ |u_n|<\frac{1}{2}}$

2

لدينا : $u_{n+1}-u_n=u_n^2+u_n-\frac{1}{4}-u_n=u_n^2-\frac{1}{4}$ وبما أن $|u_n|<\frac{1}{2}$ فإن $u_n^2<\frac{1}{4}$ أي : $u_n^2-\frac{1}{4}<0$

بالتالي (u_n) متتالية تناقصية.

3

بالنسبة لـ $n=0$ ، لدينا : $\left(u_0+\frac{1}{2}\right)^{2^0}=\left(u_0+\frac{1}{2}\right)^1=u_0+\frac{1}{2}$

نفترض أن $u_n+\frac{1}{2}=\left(u_0+\frac{1}{2}\right)^{2^n}$ ونبين أن: $u_{n+1}+\frac{1}{2}=\left(u_0+\frac{1}{2}\right)^{2^{n+1}}$

لدينا :

$$u_{n+1}+\frac{1}{2}=u_n^2+u_n-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}=u_n^2+u_n+\frac{1}{4}=\left(u_n+\frac{1}{2}\right)^2=\left(\left(u_0+\frac{1}{2}\right)^{2^n}\right)^2$$

$$u_{n+1}+\frac{1}{2}=\left(u_0+\frac{1}{2}\right)^{2^n\times 2}=\left(u_0+\frac{1}{2}\right)^{2^{n+1}}$$

بالتالي : $\boxed{\forall n\in IN\ \ u_n+\frac{1}{2}=\left(u_0+\frac{1}{2}\right)^{2^n}}$