السنة 1 بكالوريا علوم تجريبية	المتتاليـــــات العددية حلول مقترحة	سلسلة 1

تمرين 1 : $u_{n+1} = \frac{2}{5}u_n + 1 \ ; \ u_0 = 2$

$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{2}{5}u_n + 1 \end{cases}$	$u_1 = \frac{2}{5}u_0 + 1$ $u_1 = \frac{4}{5} + 1 = \frac{9}{5}$	$u_2 = \frac{2}{5}u_1 + 1$ $u_2 = \frac{18}{25} + 1 = \frac{43}{25}$	$u_3 = \frac{2}{5}u_2 + 1$ $u_3 = \frac{86}{125} + 1 = \frac{211}{125}$

تمرين 2 : $u_{n+1} = 1 + \frac{1}{u_n} \ ; \ u_0 = 1$

$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = 1 + \frac{1}{u_n} \end{cases}$	$u_1 = 1 + \frac{1}{u_0}$ $u_1 = 1 + 1 = 2$	$u_2 = 1 + \frac{1}{u_1}$ $u_2 = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$	$u_3 = 1 + \frac{1}{u_2}$ $u_3 = 1 + \frac{2}{3} = \frac{5}{3}$

لاحظ أن حساب u_3 يرجع إلى حساب u_2 و u_1 و u_0 بالضرورة ، ولذلك تسمى مثل هذه المتتاليات بالترجعية.

تمرين 3 : $u_0 = 4 \ ; \ u_{n+1} = 2u_n - 1$ و $v_n = 3 \times 2^n + 1$

1	$u_0 = 4$	$u_1 = 2u_0 - 1$ $u_1 = 8 - 1 = 7$	$u_2 = 2u_1 - 1$ $u_2 = 14 - 1 = 13$	$u_3 = 2u_2 - 1$ $u_3 = 26 - 1 = 25$
	$v_0 = 3 \times 2^0 + 1$ $v_0 = 3 + 1 = 4$	$v_1 = 3 \times 2^1 + 1$ $v_0 = 6 + 1 = 7$	$v_2 = 3 \times 2^2 + 1$ $v_2 = 12 + 1 = 13$	$v_3 = 3 \times 2^3 + 1$ $v_3 = 24 + 1 = 25$

2

لنبين بالترجع أن : $u_n = 3 \times 2^n + 1 \quad \forall n \in IN$

بالنسبة لـ $n = 0$ ، لدينا : $u_0 = 4$ و $3 \times 2^0 + 1 = 3 + 1 = 4$ منه : $u_0 = 3 \times 2^0 + 1$

نفترض أن : $u_n = 3 \times 2^n + 1$ و نبين أن : $u_{n+1} = 3 \times 2^{n+1} + 1$

لدينا : $u_{n+1} = 2u_n - 1 = 2(3 \times 2^n + 1) - 1 = 2 \times 3 \times 2^n + 2 - 1 = 3 \times 2^{n+1} + 1$

لاحظ أن نتيجة السؤال الأخير تعني أننا نستطيع إيجاد تعبير مباشر لبعض المتتاليات الترجعية، مما يسمح بحساب حدودها دون ضرورة حساب الحدود التي تسبقها .

تمرين 4 : $u_0 = 5 \ ; \ u_{n+1} = 3u_n - 4$

1	$u_1 = 3u_0 - 4$ $u_1 = 15 - 4 = 11$	$u_2 = 3u_1 - 4$ $u_2 = 33 - 4 = 29$	$u_3 = 3u_2 - 4$ $u_3 = 87 - 4 = 83$

2

لنبين بالترجع أن $u_n > 2 \quad \forall n \in IN$

بالنسبة لـ $n = 0$ ، لدينا : $u_0 = 5$ منه : $u_0 > 2$

نفترض أن : $u_n > 2$ و نبين أن : $u_{n+1} > 2$

لدينا : $u_n > 2 \Rightarrow 3u_n > 6 \Rightarrow 3u_n - 4 > 6 - 4 \Rightarrow u_{n+1} > 2$

3 لدينا : $u_{n+1} - u_n = 3u_n - 4 - u_n = 2u_n - 4 = 2(u_n - 2) > 0 \quad \forall n \in IN$ ، إذن (u_n) تزايدية

لاحظ أننا استعملنا السؤال الثاني لدراسة رتابة المتتالية و هذا الأمر يكون ضروريا في أغلب المتتاليات.

تمرين 5 : $u_0 = 3 \ ; \ u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{4}{u_n}\right)$

1

لنبين بالترجع أن $u_n \geq 2 \quad \forall n \in IN$

بالنسبة لـ $n = 0$ ، لدينا : $u_0 = 3$ منه : $u_0 \geq 2$

نفترض أن : $u_n \geq 2$ و نبين أن : $u_{n+1} \geq 2$

لدينا : $u_{n+1}-2=\frac{1}{2}\left(u_n+\frac{4}{u_n}\right)-2=\frac{1}{2}\left(u_n+\frac{4}{u_n}-4\right)=\frac{1}{2}\,\frac{u_n^2+4-4u_n}{u_n}=\frac{(u_n-2)^2}{2u_n}\geq 0$ منه : $u_{n+1}\geq 2$

بالتالي : $u_n\geq 2 \quad \forall n\in IN$ أي أن u_n مصغورة بـ 2

2 لدينا : $u_{n+1}-u_n=\frac{1}{2}\left(u_n+\frac{4}{u_n}\right)-u_n=\frac{u_n^2+4}{2u_n}-u_n=\frac{u_n^2+4-2u_n^2}{2u_n}=\frac{4-u_n^2}{2u_n}=\frac{(2+u_n)(2-u_n)}{2u_n}$

وبما أن $u_n\geq 2$ (حسب السؤال السابق) فإن $2-u_n\leq 0$ و $2+u_n>0$ و $2\,u_n>0$ ومنه : $u_{n+1}-u_n\leq 0$

وبالتالي : (u_n) تناقصية

لاحظ أننا استعملنا طريقة مغايرة للطريقة السابقة، لأن التأطير المباشر لا يؤدي للنتيجة المطلوبة.

تمرين 6 : $u_0=4 \quad ; \quad u_{n+1}=\frac{2u_n^2-3}{u_n+2}$

1

أ) لدينا $u_{n+1}-3=\frac{2u_n^2-3}{u_n+2}-3=\frac{2u_n^2-3-3(u_n+2)}{u_n+2}=\frac{2u_n^2-3-3u_n-6}{u_n+2}=\frac{2u_n^2-3u_n-9}{u_n+2} \quad \forall n\in IN$

وبما أن : $(u_n-3)(2u_n+3)=2u_n^2+3u_n-6u_n-9=2u_n^2-3u_n-9 \quad \forall n\in IN$

فإن : $\boxed{\forall n\in IN \quad u_{n+1}-3=\frac{(u_n-3)(2u_n+3)}{u_n+2}}$

ب) لنبين بالترجع أن $\forall n\in IN \ u_n\geq 3$

بالنسبة لـ $n=0$ ، لدينا : $u_0=4$ منه : $u_0\geq 3$

نفترض أن : $u_n\geq 3$ و نبين أن : $u_{n+1}\geq 3$

وبما أن $u_n\geq 3$ (حسب الافتراض) فإن $u_n-3\geq 0$ و $2u_n+3>0$ و $u_n+2>0$

إذن حسب السؤال السابق $u_{n+1}-3\geq 0$ ومنه : $u_{n+1}\geq 3$

2

أ) لدينا :

$\forall n\in IN \ u_{n+1}-u_n=\frac{2u_n^2-3}{u_n+2}-u_n=\frac{2u_n^2-3-u_n(u_n+2)}{u_n+2}=\frac{2u_n^2-3-u_n^2-2u_n}{u_n+2}=\frac{u_n^2-2u_n-3}{u_n+2}$

وبما أن : $(u_n-3)(u_n+1)=u_n^2+u_n-3u_n-3=u_n^2-2u_n-3 \quad \forall n\in IN$

فإن : $\boxed{\forall n\in IN \quad u_{n+1}-u_n=\frac{(u_n-3)(u_n+1)}{u_n+2}}$

ب) بما أن $u_n\geq 3$ فإن : $u_n-3\geq 0$ و $u_n+1>0$ و $u_n+2>0$ ومنه $u_{n+1}-u_n\geq 0$

وبالتالي : (u_n) تزايدية

لاحظ أن تقنية استعمال الفرق جد مهمة، لكن يمكن البرهان مباشرة في بعض الحالات كما هو الشأن في التمرين 4

تمرين 7 : $u_0=1 \quad ; \quad u_{n+1}=\sqrt{2u_n+8}$

1 لنبين بالترجع أن $u_n\leq 4 \quad \forall n\in IN$

بالنسبة لـ $n=0$ ، لدينا : $u_0=1$ منه : $u_0\leq 4$

نفترض أن : $u_n\leq 4$ ونبين أن : $u_{n+1}\leq 4$

لدينا : $u_n\leq 4 \Rightarrow 2u_n\leq 8 \Rightarrow 2u_n+8\leq 16 \Rightarrow 2u_n+8\leq\sqrt{16} \Rightarrow u_{n+1}\leq 4$

يمكن أيضا استعمال تقنية الفرق، لكن يجب استعمال المرافق، كما يلي:

$$u_{n+1}-4=\sqrt{2u_n+8}-4=\frac{2u_n+8-16}{\sqrt{2u_n+8}+4}=\frac{2(u_n-4)}{\sqrt{2u_n+8}+4}\leq 0$$

2 لدينا : $u_{n+1}^2-u_n^2=2u_n+8-u_n^2$

لنعمل الحدودية : $p(x)=-x^2+2x+8$

محددتها هي : $\Delta=4+32=36$ منه : $x_1=\frac{-2+6}{-2}=-2$ و $x_2=\frac{-2-6}{-2}=4$

إذن : $p(x)=-(x+2)(x-4)$ ، إذن: $u_{n+1}^2-u_n^2=-(u_n+2)(u_n-4)$

بما أن : $0\le u_n\le 4$ $\forall n\in IN$ فإن : $-(u_n+2)(u_n-4)=(u_n+2)(4-u_n)\ge 0$

إذن : $u_{n+1}^2\ge u_n^2$ منه : $u_{n+1}\ge u_n$ بالتالي : u_n متتالية تزايدية.

تذكير : لتعميل الحدودية : $p(x)=ax^2+bx+c$ نحدد جذريها (إن وجدا حيث يجب أن نجد : $\Delta=b^2-4ac\ge 0$)

: $x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ و $x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ ، فيكون التعميل هو : $p(x)=a(x-x_1)(x-x_2)$