

ملخص درس عموميات حول الدوال

I. مجموعة تعريف دالة عددية "تذكير"

لتكن f دالة عددية لمتغير حقيقي x .

مجموعة تعريف الدالة f هي المجموعة المكونة من جميع الأعداد الحقيقية x بحيث $f(x)$ موجود أي $f(x)$ قابلة للحساب. و يرمز لها غالبا

بالرمز D_f بمعنى: $x \in D_f$ تكافئ $f(x) \in \mathbb{R}$ $D_f = \{x \in \mathbb{R} / f(x) \in \mathbb{R}\}$

ملاحظات: 1) إذا كانت f دالة حدودية فإن $D_f = \mathbb{R}$

إذا كانت f دالة معرفة على الشكل: $f(x) = \sqrt{P(x)}$ فإن $D_f = \{x \in \mathbb{R} / P(x) \geq 0\}$

إذا كانت f دالة معرفة على الشكل: $f(x) = \frac{P(x)}{\sqrt{Q(x)}}$ فإن $D_f = \{x \in \mathbb{R} / Q(x) > 0\}$

II. الدالة المكبورة و الدالة المصغورة و الدالة المحدودة

لتكن f دالة عددية معرفة على مجال I من $\mathbb{R}$.

• نقول إن f دالة مكبورة على مجال I إذا وجد عدد حقيقي M بحيث: $\forall x \in I \quad f(x) \leq M$

• نقول إن f دالة مصغورة على مجال I إذا وجد عدد حقيقي m بحيث: $\forall x \in I \quad f(x) \geq m$

• نقول إن f دالة محدودة على مجال I إذا كانت مكبورة و مصغورة على المجال I .

خاصية: لتكن f دالة عددية معرفة على مجال I من $\mathbb{R}$. تكون f دالة محدودة على المجال I إذا وجد عدد حقيقي k بحيث: $\forall x \in I \quad |f(x)| \leq k$

مثال: نعتبر الدالة f المعرفة كالتالي: $f(x) = x^2 - 2x + 5$

بين أن الدالة f مصغورة بالعدد 4

الجواب: يكفي أن نبين أن: $\forall x \in \mathbb{R} \quad 4 \leq f(x)$

اذن نحسب الفرق: $f(x) - 4 = x^2 - 2x + 5 - 4 = x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2 \geq 0$

ومنه: $\forall x \in \mathbb{R} \quad 4 \leq f(x)$

وبالتالي f مصغورة على $\mathbb{R}$ بالعدد 4

III. الدالة الدورية

لتكن f دالة عددية و D مجموعة تعريفها.

نقول إن f دالة دورية إذا وجد عدد حقيقي T موجب قطعاً بحيث:

• إذا كانت $x \in D$ فإن $x+T \in D$

• $\forall x \in D \quad f(x+T) = f(x)$

مثال: الدوال: $\sin$ و $\cos$ دورية و دورهم $T = 2\pi$

الدالة $\tan$ دالة دورية و دورها هو: $T = \pi$

IV. مطاريق دالة عددية

تعريف: لتكن f دالة عددية معرفة على مجال I و a عنصراً من المجال I

• نقول إن $f(a)$ هي القيمة القصوى للدالة f على المجال I , إذا كان: $\forall x \in I \quad f(x) \leq f(a)$

• نقول إن $f(a)$ هي القيمة الدنيا للدالة f على المجال I , إذا كان: $\forall x \in I \quad f(x) \geq f(a)$

V. مقارنة دالتين

تعريف: لتكن f و g دالتين عدديتين و D_f و D_g على التوالي مجموعة تعريفهما.

نقول إن f تساوي g ونكتب $f = g$ إذا وفقط إذا كان:

$(\forall x \in D_f) \quad f(x) = g(x)$ و $D_g = D_f$

تعريف: لتكن f و g دالتين عدديتين معرفتين على مجال I . نقول إن f أصغر من أو يساوي g على مجال I ونكتب $f \leq g$

إذا وفقط إذا كان: $(\forall x \in I) \quad f(x) \leq g(x)$

التأويل الهندسي: $f \leq g$ على مجال I يعني هندسياً أن منحنى الدالة f يوجد تحت منحنى الدالة g على المجال I .

ملحوظة:

• $f < g$ على المجال I إذا وفقط إذا كان: $(\forall x \in I) \quad f(x) < g(x)$

• $f \geq 0$ على المجال I إذا وفقط إذا كان: $(\forall x \in I) \quad f(x) \geq 0$

مثال: قارن الدالتين العدديتين f و g المعرفتين كالتالي : $g(x) = 4x - 1$ و $f(x) = 4x^2$ واعط تأويلا مبيانيا للنتيجة

الجواب : $D_f = \mathbb{R}$ و $D_g = \mathbb{R}$ لأنهم دوال حدودية

$$f(x) - g(x) = 4x^2 - 4x + 1 = (2x - 1)^2 \geq 0$$

ومنه : $f \geq g$ بالتالي منحنى الدالة f يوجد فوق منحنى الدالة g على $\mathbb{R}$.

VI. مركب الدالتين

تعريف: لتكن f و g دالتين عدديتين و D_f و D_g على التوالي مجموعة تعريفهما. $D_{g \circ f} = \{x \in \mathbb{R} / x \in D_f \text{ و } f(x) \in D_g\}$

الدالة العددية h المعرفة على $D_{g \circ f}$ بما يلي : $h(x) = g(f(x))$, تسمى مركب الدالتين f و g في هذا الترتيب ويرمز لها بالرمز $g \circ f$

ومنه : $\forall x \in D_{g \circ f} (g \circ f)(x) = g(f(x))$

VII. رتابة دالة عددية

منحى تغيرات دالة عددية

تعريف: لتكن f دالة عددية و I مجالا ضمن مجموعة تعريفها.

- f تزايدية قطعاً على المجال I إذا وفقط إذا كان : $(x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)) (\forall (x_1, x_2) \in I^2)$
- f تناقصية قطعاً على المجال I إذا وفقط إذا كان : $(x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)) (\forall (x_1, x_2) \in I^2)$
- f ثابتة على المجال I إذا وفقط إذا كان : $f(x_1) = g(x_2) (\forall (x_1, x_2) \in I^2)$

ملحوظة: يمكن دراسة رتابة دالة f على مجال I بدراسة إشارة معدل التغير : $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$ مع x_1 و x_2 عنصرين مختلفين من I

• نقول إن f دالة رتبية على I إذا كانت f تزايدية قطعاً أو تناقصية قطعاً على مجال I .

خاصية: لتكن f دالة عددية مجموعة تعريفها D_f متماثلة بالنسبة للصفر. ليكن I مجالا من $\mathbb{R}^+$ ضمن D_f و I'

متماثل I بالنسبة للصفر

إذا كانت f دالة زوجية فان :

■ f تزايدية قطعاً على المجال I إذا وفقط إذا كانت f تناقصية قطعاً على المجال I'

■ f تناقصية قطعاً على المجال I إذا وفقط إذا كانت f تزايدية قطعاً على المجال I'

إذا كانت f دالة فردية فان : f لها نفس الرتابة على كل من المجالين I و I'

VIII. رتابة مركب الدالتين :

خاصية: لتكن f و g دالتين عدديتين معرفتين على التوالي

على المجالين I و J بحيث : $f(x) \in J (\forall x \in I)$ لدينا :

- إذا كانت f تزايدية قطعاً على I و g تزايدية قطعاً على J فان : $g \circ f$ تزايدية قطعاً على I
- إذا كانت f تناقصية قطعاً على I و g تناقصية قطعاً على J فان : $g \circ f$ تزايدية قطعاً على I
- إذا كانت f تزايدية قطعاً على I و g تناقصية قطعاً على J فان : $g \circ f$ تناقصية قطعاً على I
- إذا كانت f تناقصية قطعاً على I و g تزايدية قطعاً على J فان : $g \circ f$ تناقصية قطعاً على I

IX. دراسة الدالتين $x \rightarrow \sqrt{x+a}$ و $x \rightarrow ax^3$:

مثال 2: لتكن f الدالة العددية المعرفة كالتالي : $f(x) = ax^3 = \frac{1}{4}x^3$

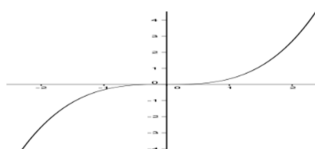
$a = \frac{1}{4} > 0$ لأنها دالة حدودية

(2) ليكن : $x_1 \in \mathbb{R}$ $x_2 \in \mathbb{R}$ بحيث $x_1 < x_2$

اذن : $x_1^3 < x_2^3$ ومنه $\frac{1}{4}x_1^3 < \frac{1}{4}x_2^3$ أي $f(x_1) < f(x_2)$

ومنه الدالة f تزايدية على $\mathbb{R}$

X	-3	-2	-1	0	1	2	3
f(x)	6.5	-2	-1/4	0	1/4	2	6.5



x	$-\infty$	$+\infty$
f(x)		

ملحوظة: إذا كان a سالب قطعاً فان الدالة ستكون تناقصية على $\mathbb{R}$

مثال 1: لتكن f الدالة العددية

للمتغير الحقيقي x

كالتالي : $f(x) = \sqrt{x+2}$

(1) $D_f = \{x \in \mathbb{R} / x+2 \geq 0\} = \{x \in \mathbb{R} / x \geq -2\} = [-2, +\infty[$

(2) ليكن : $x_1 \in [-2, +\infty[$ و $x_2 \in [-2, +\infty[$ بحيث $x_1 < x_2$

اذن : $x_1 + 2 < x_2 + 2$ ومنه $\sqrt{x_1+2} < \sqrt{x_2+2}$ أي $f(x_1) < f(x_2)$

ومنه الدالة f تزايدية على $[-2, +\infty[$

x	-2	$+\infty$
f(x)	0	$+\infty$

