

مذكرة رقم 2 في درس عموميات حول الدوال

الأهداف القدرات المنتظرة من الدرس :

– الدالة المكبورة، الدالة المصغورة؛ الدالة المحدودة؛ الدالة الدورية؛
– مقارنة دالتين؛ التأويل الهندسي؛
– مطايف دالة؛
– رتبة دالة عددية؛
– تركيب دالتين عدديتين؛
– رتبة مركب دالتين رتبيتين؛
– التمثيل المبياني للدالتين: $x \rightarrow \sqrt{x+a}$ و $x \rightarrow ax^3$ ؛

– مقارنة تعبيرين باستعمال مختلف التقنيات؛
– استنتاج تغيرات دالة أو القيم القصوى والدنوية لدالة انطلاقا من تمثيلها المبياني أو من جدول تغيراتها؛
– التعرف على تغيرات الدوال من الشكل $f + \lambda$ و λf انطلاقا من تغيرات الدالة f ؛
– استعمال التمثيل المبياني لدالة أو جدول تغيراتها لتحديد صورة مجال ولحل بعض المعادلات والمترجمات؛
– تحديد تغيرات $g \circ f$ انطلاقا من تغيرات g و f .

– ينبغي تعويد التلاميذ على استنتاج تغيرات دالة عددية انطلاقا من تمثيلها المبياني. كما ينبغي الاهتمام بإنشاء المنحنيات؛
– ينبغي تناول الحل المبياني لمعادلات ومترجمات من النوع $f(x) \leq c$ و $f(x) = c$ و $f(x) < g(x)$ و $f(x) = g(x)$ و $f(x) \leq g(x)$ ؛
– يمكن في حدود الإمكان؛ استعمال الآلات الحاسبة والبرامج المعلوماتية المدمجة في الحاسوب والتي تمكن من دراسة الدوال؛
– يستحسن معالجة وضعيات مختارة تنطلق من ميادين أخرى.

I. مجموعة تعريف دالة عددية "تذكير"

أمثلة: حدد مجموعة تعريف الدوال المعرفة كالتالي :

$$h(x) = \sqrt{2x^2 - x - 1} \quad (3) \quad g(x) = \frac{3x+1}{2x^2 - x - 1} \quad (2) \quad f(x) = 2x^3 + x + 3 \quad (1)$$

أجوبة: (1) $D_f = \mathbb{R}$ لأنها دالة حدودية

يعني $D_f = \mathbb{R}$ لأنها دالة حدودية

$$D_g = \{x \in \mathbb{R} / 2x^2 - x - 1 \neq 0\} \quad \text{يعني} \quad g(x) = \frac{3x+1}{2x^2 - x - 1} \quad (2)$$

نحل المعادلة باستعمال المميز $2x^2 - x - 1 = 0$

$$c = -1 \quad \text{و} \quad b = -1 \quad \text{و} \quad a = 2$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4 \times 2 \times (-1) = 1 + 8 = 9 = (3)^2 > 0$$

بما أن $\Delta > 0$ فإن هذه المعادلة تقبل حلين هما:

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{و} \quad x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x_2 = \frac{1-3}{2 \times 2} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2} \quad \text{و} \quad x_1 = \frac{-(-1) + \sqrt{9}}{2 \times 2} = \frac{1+3}{4} = \frac{4}{4} = 1$$

$$\text{ومنه:} \quad D_g = \mathbb{R} - \left\{ -\frac{1}{2}; 1 \right\}$$

$$D_h = \{x \in \mathbb{R} / 2x^2 - x - 1 \geq 0\} \quad h(x) = \sqrt{2x^2 - x - 1} \quad (3)$$

$$\text{نحدد جدول الإشارة:} \quad x_2 = -\frac{1}{2} \quad \text{و} \quad x_1 = 1$$

x	$-\infty$	$-1/2$	1	$+\infty$	
$2x^2-x-1$	$+$	0	$-$	0	$+$

$$\text{ومنه:} \quad D_h = \left] -\infty, -\frac{1}{2} \right] \cup [1, +\infty[$$

تمرين 1: حدد مجموعة تعريف الدوال المعرفة كالتالي:

$$h(x) = \frac{x^2 + x - 3}{2|x| - 1} \quad (3) \quad g(x) = \frac{4x+1}{x^2 + x + 1} \quad (2) \quad f(x) = \frac{|x|(2x+1)}{x(2x^2 + x - 3)} \quad (1)$$

$$C(x) = \sqrt{3 - x^2} \quad (6) \quad B(x) = \frac{x^2 - 3}{|x-1| - |x+1|} \quad (5) \quad A(x) = \frac{x^2 - 3}{4|x| + 2} \quad (4)$$

$$\text{أجوبة: (1)} \quad D_f = \{x \in \mathbb{R} / x(2x^2 + x - 3) \neq 0\}$$

$$x(2x^2 + x - 3) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ و } 2x^2 + x - 3 = 0$$

$$2x^2 + x - 3 = 0 \quad \text{نحل المعادلة باستعمال المميز}$$

$$c = -3 \quad \text{و} \quad b = 1 \quad \text{و} \quad a = 2$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (1)^2 - 4 \times 2 \times (-3) = 1 + 24 = 25 = (5)^2 > 0$$

بما أن $\Delta > 0$ فإن هذه المعادلة تقبل حلين هما:

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{و} \quad x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x_2 = \frac{-1-5}{2 \times 2} = \frac{-6}{4} = -\frac{3}{2} \quad \text{و} \quad x_1 = \frac{-1+5}{2 \times 2} = \frac{4}{4} = 1$$

$$\text{ومنه:} \quad D_f = \mathbb{R} - \left\{ -\frac{3}{2}; 1 \right\}$$

$$D_g = \{x \in \mathbb{R} / x^2 + x + 1 \neq 0\} \quad (2)$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (1)^2 - 4 \times 1 \times 1 = 1 - 4 = -3 < 0$$

ومنه المعادلة ليس لها حل في $\mathbb{R}$

وبالتالي: $D_g = \mathbb{R}$

$$D_h = \{x \in \mathbb{R} / 2|x| - 1 \neq 0\} \quad (3)$$

$$2|x| - 1 = 0 \Leftrightarrow |x| = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \text{ و } x = -\frac{1}{2}$$

$$\text{ومنه:} \quad D_h = \mathbb{R} - \left\{ -\frac{1}{2}; \frac{1}{2} \right\}$$

$$D_A = \{x \in \mathbb{R} / 4|x| + 2 \neq 0\} \quad (4)$$

$$4|x| + 2 = 0 \Leftrightarrow |x| = -\frac{1}{2}$$

وهذه المعادلة ليس لها حل في $\mathbb{R}$ ومنه: $D_A = \mathbb{R}$

$$D_B = \{x \in \mathbb{R} / |x-1| - |x+1| \neq 0\} \quad (5)$$

$$|x-1| - |x+1| = 0 \Leftrightarrow |x-1| = |x+1|$$

$$\text{ومنه:} \quad x - 1 = x + 1 \text{ و } x - 1 = -(x + 1)$$

$$x = 0 \Leftrightarrow -1 = 1 \text{ و } 2x = 0$$

$$D_B = \mathbb{R} - \{0\} = \mathbb{R}^*$$

$$D_C = \{x \in \mathbb{R} / 3 - x^2 \geq 0\} \quad C(x) = \sqrt{3 - x^2} \quad (6)$$

$$3 - x^2 = 0 \Leftrightarrow (\sqrt{3})^2 - x^2 = 0 \Leftrightarrow (\sqrt{3} - x)(\sqrt{3} + x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{3} - x = 0 \text{ و } \sqrt{3} + x = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt{3} \text{ و } x = -\sqrt{3}$$

نحدد جدول الإشارة :

x	$-\infty$	$-\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$	$+\infty$	
$3-x^2$	$-$	0	$+$	0	$-$

ومنه : $D_c = [-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$

II. الدالة المكبورة و الدالة المصغورة و الدالة المحدودة

نشاط : نعتبر الدالة f المعرفة كالتالي : $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$

1. حدد D_f حيز تعريف الدالة f

2. بين أن : $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) \leq 1$

3. بين أن : $\forall x \in \mathbb{R} \quad 0 \leq f(x)$

4. ماذا تستنتج ؟ ماذا نقول عن الدالة f ؟

الأجوبة: 1: $D_f = \{x \in \mathbb{R} / x^2+1 \neq 0\}$

$x^2 = -1 \Leftrightarrow x^2+1=0$ وهذه المعادلة ليس لها حل في $\mathbb{R}$
 $D_f = \mathbb{R}$

2) نعلم أن : $\forall x \in \mathbb{R} \quad x^2 \geq 0$

اذن : $x^2+1 \geq 1$ يعني $x^2+1 \geq 0+1$

يعني $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) \leq 1 \Leftrightarrow \frac{1}{x^2+1} \leq 1$

نقول f دالة مكبورة على $\mathbb{R}$ بالعدد 1

سؤال: هل الدالة f مكبورة على $\mathbb{R}$ بالعدد 2؟ نعم

3) نعلم أن : $\forall x \in \mathbb{R} \quad x^2 \geq 0$

اذن : $x^2+1 \geq 1$ يعني $x^2+1 \geq 0+1$

يعني $\forall x \in \mathbb{R} \quad 0 \leq f(x)$

نقول f دالة مصغورة على $\mathbb{R}$ بالعدد 0

سؤال: هل الدالة f مصغورة على $\mathbb{R}$ بالعدد -1؟ نعم

4) نستنتج أن : $\forall x \in \mathbb{R} \quad 0 \leq f(x) \leq 1$

اذن : f مكبورة و مصغورة على $\mathbb{R}$ نقول f دالة محدودة على $\mathbb{R}$

1. تعريف

لتكن f دالة عددية معرفة على مجال I من $\mathbb{R}$.

• نقول إن f دالة مكبورة على مجال I إذا وجد عدد حقيقي M بحيث :

$$\forall x \in I \quad f(x) \leq M$$

• نقول إن f دالة مصغورة على مجال I إذا وجد عدد حقيقي m بحيث :

$$\forall x \in I \quad f(x) \geq m$$

• نقول إن f دالة محدودة على مجال I إذا كانت مكبورة و مصغورة على المجال I .

2. خاصية:

لتكن f دالة عددية معرفة على مجال I من $\mathbb{R}$. تكون f دالة محدودة

على المجال I إذا وجد عدد حقيقي k بحيث : $\forall x \in I \quad |f(x)| \leq k$

تمرين 2: حدد من بين الدوال f التالية الدوال المكبورة و المصغورة و المحدودة

$$I = \mathbb{R} \quad f(x) = |x| + 6$$

$$I = \mathbb{R} \quad f(x) = 2\cos x + 1$$

$$I = \mathbb{R} \quad f(x) = -x^4 - 4$$

$$I = \mathbb{R}^+ \quad f(x) = \sqrt{x} + 6$$

$$I = \mathbb{R} \quad f(x) = \sin x - 2$$

الأجوبة: 1: نعلم أن : $\forall x \in \mathbb{R} \quad |x| \geq 0$

اذن : $|x| + 6 \geq 6$ يعني $|x| + 6 \geq 0 + 6$

أي $\forall x \in \mathbb{R} \quad 6 \leq f(x)$

اذن f دالة مصغورة على $\mathbb{R}$ بالعدد 6

2) نعلم أن : $\forall x \in \mathbb{R} \quad -1 \leq \cos x \leq 1$

اذن : $-2 \leq 2\cos x \leq 2$ يعني $-2+1 \leq 2\cos x + 1 \leq 2+1$

يعني $\forall x \in \mathbb{R} \quad -1 \leq f(x) \leq 3$

اذن : f دالة محدودة على $\mathbb{R}$

3) نعلم أن : $\forall x \in \mathbb{R} \quad x^4 \geq 0$ يعني $-x^4 \leq 0$ يعني $-x^4 - 4 \leq 0 - 4$

يعني $f(x) \leq -4$ ومنه f مكبورة على $\mathbb{R}$ بالعدد -4

4) نعلم أن : $\forall x \in \mathbb{R}^+ \quad \sqrt{x} \geq 0$ يعني $\sqrt{x} + 6 \geq 0 + 6$

يعني $f(x) \geq 6$ ومنه f مصغورة على $I = \mathbb{R}^+$ بالعدد 6

5) نعلم أن : $\forall x \in \mathbb{R} \quad -1 \leq \sin x \leq 1$

اذن : $-2 \leq \sin x - 2 \leq -1$ يعني $-3 \leq \sin x - 2 \leq -1$

يعني $\forall x \in \mathbb{R} \quad -3 \leq f(x) \leq -1$

اذن : f دالة محدودة على $\mathbb{R}$

تمرين 3: نعتبر الدالة f المعرفة كالتالي : $f(x) = x^2 - 2x + 5$

بين أن الدالة f مصغورة بالعدد 4

الجواب : يكفي أن نبين أن : $\forall x \in \mathbb{R} \quad 4 \leq f(x)$

اذن نحسب الفرق : $f(x) - 4 = x^2 - 2x + 5 - 4 = x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2 \geq 0$

ومنه : $\forall x \in \mathbb{R} \quad 4 \leq f(x)$

وبالتالي f مصغورة على $\mathbb{R}$ بالعدد 4

تمرين 4: نعتبر الدالة f المعرفة كالتالي : $f(x) = -2x^2 + 4x + 1$

بين أن الدالة f مكبورة بالعدد 3

الجواب : يكفي أن نبين أن : $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) \leq 3$

اذن نحسب الفرق : $3 - f(x) = 3 - (-2x^2 + 4x + 1) = 3 + 2x^2 - 4x - 1 = 2x^2 - 4x + 2 = 2(x^2 - 2x + 1) = 2(x-1)^2 \geq 0$

ومنه : $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) \leq 3$

وبالتالي f مكبورة على $\mathbb{R}$ بالعدد 3

تمرين 5: نعتبر الدالة f المعرفة كالتالي : $f(x) = \frac{5+4x^4}{x^4+1}$

بين أن الدالة f مصغورة بالعدد 4

الجواب : يكفي أن نبين أن : $\forall x \in \mathbb{R} \quad 4 \leq f(x)$

اذن نحسب الفرق :

$$f(x) - 4 = \frac{5+4x^4}{x^4+1} - 4 = \frac{5+4x^4 - 4(x^4+1)}{x^4+1} = \frac{5+4x^4 - 4x^4 - 4}{x^4+1} = \frac{1}{x^4+1} \geq 0$$

ومنه : $\forall x \in \mathbb{R} \quad 4 \leq f(x)$

تمرين 6: لتكن f الدالة العددية المعرفة على $I = [1; +\infty[$ بما يلي:

$$f(x) = -5x - \sqrt{x-1}$$

بين أن الدالة f مكبورة بالعدد -5 على $I = [1; +\infty[$

الجواب : يكفي أن نبين أن : $\forall x \in [1; +\infty[\quad f(x) \leq -5$

نعلم أن : $\forall x \in [1; +\infty[\quad \sqrt{x-1} \geq 0$ يعني $-\sqrt{x-1} \leq 0$

ولدينا : $-5x \leq -5 \Leftrightarrow x \geq 1 \Leftrightarrow x \in [1; +\infty[$

من (1) و (2) نحصل على : $-\sqrt{x-1} - 5x \leq 0 - 5$

يعني $f(x) \leq -5$ ومنه f مكبورة على $I = [1; +\infty[$ بالعدد -5

تمرين 7: نعتبر الدالة f المعرفة كالتالي : $f(x) = \frac{2x^2+7x+7}{x^2+3x+3}$

1. حدد D_f حيز تعريف الدالة f

2. بين أن الدالة f مكبورة بالعدد $\frac{7}{3}$ على $\mathbb{R}$.

3. بين أن الدالة f مصغورة بالعدد 1 على $\mathbb{R}$.

4. ماذا تستنتج بالنسبة للدالة f ؟

الأجوبة: (1) $D_f = \{x \in \mathbb{R} / x^2 + 3x + 3 \neq 0\}$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 3^2 - 4 \times 3 \times 1 = 9 - 12 = -3 < 0$$

ومنه المعادلة ليس لها حل في $\mathbb{R}$

وبالتالي : $D_f = \mathbb{R}$

(2) يكفي أن نبين أن : $\forall x \in \mathbb{R} f(x) \leq \frac{7}{3}$

اذن نحسب الفرق :

$$\frac{7}{3} - f(x) = \frac{7}{3} - \frac{2x^2+7x+7}{x^2+3x+3} = \frac{7(x^2+3x+3) - 3(2x^2+7x+7)}{x^2+3x+3}$$

$$\frac{7}{3} - f(x) = \frac{7x^2+21x+21-6x^2-21x-21}{x^2+3x+3} = \frac{-x^2}{x^2+3x+3}$$

بالنسبة للحدودية x^2+3x+3 وجدنا أن : $\Delta < 0$

ومنه اشارتها هي اشارة $a=1$ أي أن : $x^2+3x+3 > 0$

وبما أنه لدينا : $x^2 \geq 0$ فإن : $\frac{-x^2}{x^2+3x+3} \geq 0$

ومنه : $\forall x \in \mathbb{R} f(x) \leq \frac{7}{3}$ بالتالي f مكبورة بالعدد $\frac{7}{3}$ على $\mathbb{R}$.

(3) يكفي أن نبين أن : $\forall x \in \mathbb{R} 1 \leq f(x)$

اذن نحسب الفرق :

$$f(x) - 1 = \frac{2x^2+7x+7}{x^2+3x+3} - 1 = \frac{2x^2+7x+7 - (x^2+3x+3)}{x^2+3x+3}$$

$$f(x) - 1 = \frac{2x^2+7x+7-x^2-3x-3}{x^2+3x+3} = \frac{x^2+4x+4}{x^2+3x+3} = \frac{(x+2)^2}{x^2+3x+3}$$

بالنسبة للحدودية x^2+3x+3 سبق أن وضعنا أن : $x^2+3x+3 > 0$

وبما أنه لدينا : $(x+2)^2 \geq 0$ فإن : $\frac{(x+2)^2}{x^2+3x+3} \geq 0$

ومنه : $\forall x \in \mathbb{R} 1 \leq f(x)$ بالتالي: الدالة f مصغورة بالعدد 1 على $\mathbb{R}$.

(4) وجدنا أن : $f(x) \leq \frac{7}{3}$ و $1 \leq f(x)$ $\forall x \in \mathbb{R}$

ومنه : $\forall x \in \mathbb{R} 1 \leq f(x) \leq \frac{7}{3}$ أي أن f محدودة على $\mathbb{R}$

III. الدالة الدورية

نشاط: نعتبر الدالة f المعرفة كالتالي : $f(x) = \cos x$

قارن : $f(x)$ و $f(x+2\pi)$ $\forall x \in \mathbb{R}$

الجواب $f(x+2\pi) = \cos(x+2\pi) = \cos x = f(x)$

1. تعريف

لتكن f دالة عددية و D مجموعة تعريفها.

نقول إن f دالة دورية إذا وجد عدد حقيقي T موجب قطعاً بحيث :

• إذا كانت $x \in D$ فإن $x+T \in D$

• $\forall x \in D f(x+T) = f(x)$

مثال : الدوال : $\cos$ و $\sin$ دورية و دورهم $T = 2\pi$

الدالة $\tan$ دالة دورية ودورها هو : $T = \pi$

تمرين 8: نعتبر الدوال f و g المعرفة على $\mathbb{R}$

كالتالي : $f(x) = \cos 6x$ و $g(x) = \sin 7x$

1. بين أن الدالة f دورية و $\frac{\pi}{3}$ دور لها.

2. بين أن الدالة g دورية و $\frac{2\pi}{7}$ دور لها.

الأجوبة: (1) $D_f = \mathbb{R}$

• إذا كانت $x \in \mathbb{R}$ فإن $x + \frac{\pi}{3} \in \mathbb{R}$

$$f\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \cos 6\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \cos(6x + 2\pi) = \cos 6x = f(x)$$

ومنه f دورية و $\frac{\pi}{3}$ دور لها.

(2) $D_g = \mathbb{R}$

• إذا كانت $x \in \mathbb{R}$ فإن $x + \frac{2\pi}{7} \in \mathbb{R}$

$$g\left(x + \frac{2\pi}{7}\right) = \sin 7\left(x + \frac{2\pi}{7}\right) = \sin(7x + 2\pi) = \sin 7x = g(x)$$

g دورية و $\frac{2\pi}{7}$ دور لها.

IV. مطايف دالة عددية

نشاط 1: لتكن f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي: $f(x) = x^2 + 2$

1. أحسب : $f(0)$

2. بين أن : $f(0) \leq f(x)$ على $\mathbb{R}$ وماذا تستنتج؟

الأجوبة: (1) $D_f = \mathbb{R}$ و $f(0) = 2$

(2) نعلم أن : $0 \leq x^2$ $\forall x \in \mathbb{R}$

اذن : $2 \leq x^2 + 2$ يعني $0 + 2 \leq x^2 + 2$

يعني $\forall x \in \mathbb{R} f(0) \leq f(x)$

نقول $f(0)$ هي قيمة دنيا للدالة f على $\mathbb{R}$

نشاط 2: تكن f دالة معرفة ب: $f(x) = -2x^2 + 4x + 1$

(1) أحسب $f(1)$ و تأكد أن : $f(x) \leq f(1)$ $\forall x \in \mathbb{R}$

(2) تأكد أن : $f(x) \leq f(1)$ $\forall x \in \mathbb{R}$

الأجوبة: (1) $D_f = \mathbb{R}$ و $f(1) = 3$

(2) نعلم أن : $0 \leq (x-1)^2$ $\forall x \in \mathbb{R}$

اذن : $-\frac{3}{2} \leq (x-1)^2 - \frac{3}{2}$ يعني $0 - \frac{3}{2} \leq (x-1)^2 - \frac{3}{2}$

يعني $\left(-\frac{3}{2}\right) \geq (-2)\left((x-1)^2 - \frac{3}{2}\right)$ يعني $\forall x \in \mathbb{R} f(x) \leq 3$

يعني $\forall x \in \mathbb{R} f(x) \leq f(1)$

نقول $f(1)$ هي قيمة قصوى للدالة f على $\mathbb{R}$

تعريف: لتكن f دالة عددية معرفة على مجال I و a عنصراً من المجال I

■ نقول إن $f(a)$ هي القيمة القصوى للدالة f على المجال I , إذا كان :

$$\forall x \in I f(x) \leq f(a)$$

■ نقول إن $f(a)$ هي القيمة الدنيا للدالة f على المجال I , إذا كان :

$$\forall x \in I f(x) \geq f(a)$$

تمرين 9: لتكن f دالة معرفة ب: $f(x) = 2x^2 + 2x + 3$

بين أن : $f(-1)$ هي قيمة دنيا للدالة f على $\mathbb{R}$

الجواب : يكفي أن نبين أن : $\forall x \in \mathbb{R} f(-1) \leq f(x)$

$$f(-1) = 2 - 2 + 3 = 3$$

اذن نحسب الفرق :

$$\frac{1}{2}f(x) = \frac{x^2+1-2x\sqrt{x^2+1}+x^2}{2} = \frac{(\sqrt{x^2+1})^2 - 2\sqrt{x^2+1}x + x^2}{2} = \frac{(\sqrt{x^2+1}-x)^2}{2} \geq 0$$

ومنه f مكبورة بالعدد $\frac{1}{2}$.

V. مقارنة الدالتين

نشاط 1: لتكن الدالتين العدديتين f و g المعرفتين على $\mathbb{R}$ بما يلي:

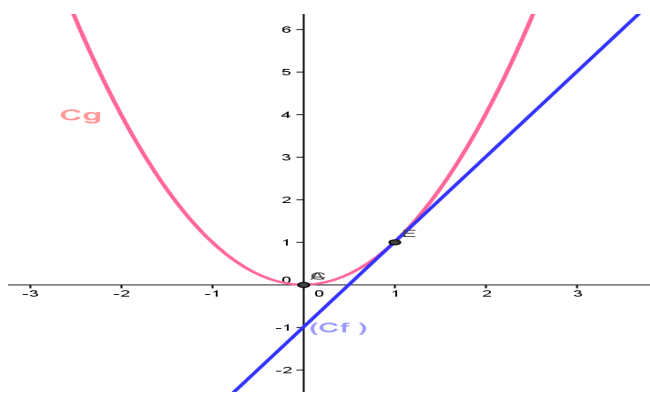
$$f(x) = 2x - 1 \quad \text{و} \quad g(x) = x^2$$

- مثل الدالتين f و g في نفس المعلم
- أدرس إشارة الفرق: $g(x) - f(x)$ وماذا تستنتج مبيانيا؟

(الأجوبة: 1) $D_f = \mathbb{R}$ و $D_g = \mathbb{R}$ لأنهم دوال حدودية

x	3	2	1	0	1	2	3
g(x)	9	4	1	0	1	4	9

x	0	1
f(x)	1	1



$$g(x) \geq f(x) \quad \text{ومنه} \quad g(x) - f(x) = x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2 \geq 0 \quad (2)$$

نقول أننا قمنا بمقارنة للدالتين f و g وجدنا أن: $g \geq f$ مبيانيا نلاحظ أن منحنى الدالة g يوجد فوق منحنى الدالة f

نشاط 2: لتكن f و g الدالتين العدديتين المعرفتين كالتالي:

$$f(x) = x \quad \text{و} \quad g(x) = x^2$$

1. حدد D_f و D_g

2. أرسم في معلم متعامد ممنظم منحنى الدالتين f و g

3. قارن f و g

تعريف: لتكن f و g دالتين عدديتين و D_f و D_g على التوالي مجموعة تعريفهما.

نقول إن f تساوي g ونكتب $f = g$ إذا وفقط إذا كان:

$$(\forall x \in D_f) \quad f(x) = g(x) \quad \text{و} \quad D_g = D_f$$

تعريف: لتكن f و g دالتين عدديتين معرفتين على مجال I . نقول إن f أصغر من أو يساوي g على مجال I ونكتب $f \leq g$ إذا وفقط إذا كان:

$$(\forall x \in I) \quad f(x) \leq g(x)$$

التأويل الهندسي: $f \leq g$ على مجال I يعني هندسيا أن منحنى الدالة f يوجد تحت منحنى الدالة g على المجال I .

ملحوظة:

• $f < g$ على المجال I

$$(\forall x \in I) \quad f(x) < g(x) \quad \text{إذا وفقط إذا كان}$$

• $f \geq 0$ على المجال I إذا وفقط إذا كان: $(\forall x \in I) \quad f(x) \geq 0$

$$f(x) - f(-1) = 2x^2 + 2x + 1 - 3 = 2x^2 + 2x - 2$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 2^2 - 4 \times 2 \times (-2) = 4 + 16 = 20 > 0$$

اذن: إشارة الحدودية هي إشارة $a=2$ اذن: $2x^2 + 2x - 2 > 0$

$$\text{ومنه: } f(-1) \leq f(x)$$

وبالتالي: $f(-1)$ هي القيمة الدنيا للدالة f على $\mathbb{R}$

تمرين 10: نعتبر الدالة f المعرفة كالتالي: $f(x) = \frac{x^2+1}{x^2+x+1}$

1. حدد D_f حيز تعريف الدالة f

2. بين أن $f(1)$ هي القيمة الدنيا للدالة f على $\mathbb{R}$.

3. بين أن $f(-1)$ هي القيمة القصوى للدالة f على $\mathbb{R}$.

$$\text{(الأجوبة: 1) } D_f = \{x \in \mathbb{R} / x^2 + x + 1 \neq 0\}$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 1^2 - 4 \times 1 \times 1 = 1 - 4 = -3 < 0$$

ومنه المعادلة ليس لها حل في $\mathbb{R}$ وبالتالي: $D_f = \mathbb{R}$

(2) يكفي أن نبين أن: $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(1) \leq f(x)$

$$f(1) = \frac{1^2+1}{1^2+1+1} = \frac{2}{3}$$

$$f(x) - f(1) = \frac{x^2+1}{x^2+x+1} - \frac{2}{3} = \frac{3x^2+3-2(x^2+x+1)}{3(x^2+x+1)} = \frac{x^2-2x+1}{3(x^2+x+1)}$$

$$\text{اذن: } f(x) - f(1) = \frac{(x-1)^2}{3(x^2+x+1)}$$

بالنسبة للحدودية: $x^2+x+1 > 0$ وجدنا $\Delta < 0$

اذن: إشارة الحدودية هي إشارة $a=1$ أي: $x^2+x+1 > 0$

ونعلم أن: $(x-1)^2 \geq 0$ اذن: $f(x) - f(1) \geq 0$

ومنه: $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(1) \leq f(x)$

و بالتالي: $f(1)$ هي القيمة الدنيا للدالة f على $\mathbb{R}$.

(3) يكفي أن نبين أن: $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) \leq f(-1)$

$$f(-1) = \frac{(-1)^2+1}{(-1)^2-1+1} = 2$$

$$f(-1) - f(x) = 2 - \frac{x^2+1}{x^2+x+1} = \frac{2(x^2+x+1) - (x^2+1)}{x^2+x+1} = \frac{x^2+2x+1}{x^2+x+1}$$

$$\text{اذن: } f(-1) - f(x) = \frac{(x+1)^2}{x^2+x+1}$$

بالنسبة للحدودية: $x^2+x+1 > 0$ سبق أن بيننا أن

$x^2+x+1 > 0$

ونعلم أن: $(x+1)^2 \geq 0$ اذن: $f(-1) - f(x) \geq 0$

ومنه: $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) \leq f(-1)$

و بالتالي: $f(-1)$ هي القيمة القصوى للدالة f على $\mathbb{R}$.

تمرين 11: نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كالتالي:

$$f(x) = x\sqrt{x^2+1} - x^2$$

الجواب: يكفي أن نبين أن: $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) \leq \frac{1}{2}$

$$\frac{1}{2} - f(x) = \frac{1}{2} - x\sqrt{x^2+1} + x^2 = \frac{1 - 2x\sqrt{x^2+1} + 2x^2}{2} = \frac{1 - 2x\sqrt{x^2+1} + 2x^2}{2}$$

تمرين 12: تطبيق: قارن الدالتين العدديتين f و g المعرفتين كالتالي :

$$f(x) = 4x^2 \text{ و } g(x) = 4x - 1$$

واعط تأويلا مبيانيا للنتيجة

الجواب : $D_f = \mathbb{R}$ و $D_g = \mathbb{R}$ لأنهم دوال حدودية

$$f(x) - g(x) = 4x^2 - 4x + 1 = (2x - 1)^2 \geq 0$$

ومنه : $f \geq g$ بالتالي منحنى الدالة f يوجد فوق منحنى

الدالة g على $\mathbb{R}$.

تمرين 13: أدرس الوضع النسبي لمنحنى الدالة f و منحنى الدالة g حيث

$$g(x) = x \text{ و } f(x) = x + \frac{1}{x+1}$$

الجواب : $D_g = \mathbb{R}$ و $D_f = \mathbb{R} - \{-1\}$

$$f(x) - g(x) = x + \frac{1}{x+1} - x = \frac{1}{x+1}$$

ندرس إشارة $\frac{1}{x+1}$:

الحالة 1: إذا كانت $x > -1$ فإن $f \geq g$ بالتالي منحنى الدالة f يوجد فوق

منحنى الدالة g على $]-1; +\infty[$.

الحالة 2: إذا كانت $x < -1$ فإن $g \geq f$ بالتالي منحنى الدالة f يوجد تحت

منحنى الدالة g على $]-\infty; -1[$.

تمرين 14: نعتبر الدالتين f و g المعرفتين على $\mathbb{R}$ كالتالي :

$$g(x) = -x^2 + 2x + 2 \text{ و } f(x) = x^2 - 3x + 5$$

أدرس الوضع النسبي لمنحنى الدالة f و منحنى الدالة g

الجواب : $D_g = \mathbb{R}$ و $D_f = \mathbb{R}$

$$f(x) - g(x) = x^2 - 3x + 5 - (-x^2 + 2x + 2) = 2x^2 - 5x + 3$$

ندرس إشارة $2x^2 - 5x + 3$:

$$c = 3 \text{ و } b = -5 \text{ و } a = 2$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4 \times 2 \times 3 = 25 - 24 = 1 > 0$$

بما أن $\Delta > 0$ فإن لهذه الحدودية جذرين هما :

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ و } x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x_2 = \frac{5-1}{2 \times 2} = \frac{4}{4} = 1 \text{ و } x_1 = \frac{5+1}{2 \times 2} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

x	$-\infty$	1	3/2	$+\infty$	
$2x^2-5x+3$	+	0	-	0	+

الحالة 1: إذا كانت $x \geq 3/2$ أو $x \leq 1$ فإن $f \geq g$

بالتالي منحنى الدالة f يوجد فوق منحنى الدالة g

على $]-\infty, 1] \cup [3/2, +\infty[$.

الحالة 2: إذا كانت $1 \leq x \leq 3/2$ فإن $g \geq f$ بالتالي منحنى

الدالة f يوجد تحت منحنى الدالة g على $[1, 3/2]$.

VI. مركب دالتين

نشاط 1: لتكن f و g الدالتين العدديتين المعرفتين كالتالي :

$$g(x) = x^2 \text{ و } f(x) = x + 1$$

حدد : $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ و

$(f \circ g)(x) = f(g(x))$ ماذا تلاحظ ؟

الجواب : $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x+1) = (x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^2) = x^2 + 1$$

نلاحظ : $g \circ f \neq f \circ g$

تمرين 15: لتكن f و g الدالتين العدديتين المعرفتين كالتالي :

$$f(x) = -x + 1 \text{ و } g(x) = x^3 - x$$

حدد $(g \circ f)(x)$

الجواب : $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(-x+1) = (-x+1)^3 - (-x+1)$

$$(g \circ f)(x) = (1-x)^3 - (-x+1) = 1^3 - 3 \times 1 \times x + 3 \times 1 \times x^2 - x^3 + x - 1 = -x^3 + 3x^2 - 2x$$

$$(g \circ f)(x) = 1^3 - 3x + 3x^2 - x^3 + x - 1 = -x^3 + 3x^2 - 2x$$

تعريف : لتكن f و g دالتين عدديتين و D_f و D_g على التوالي

مجموعة تعريفهما.

$$D_{g \circ f} = \{x \in \mathbb{R} / x \in D_f \text{ و } f(x) \in D_g\}$$

الدالة العددية h المعرفة على $D_{g \circ f}$ بما يلي : $h(x) = g(f(x))$

تسمى مركب الدالتين f و g في هذا الترتيب ويرمز لها بالرمز $g \circ f$

ومنه : $\forall x \in D_{g \circ f} (g \circ f)(x) = g(f(x))$

تمرين 16: لتكن f و g الدالتين العدديتين المعرفتين كالتالي :

$$f(x) = x - 1 \text{ و } g(x) = \sqrt{x}$$

حدد : D_f و D_g و $D_{g \circ f}$ ثم أحسب $(g \circ f)(x)$

الجواب : $D_g = \mathbb{R}$ و $D_f = [0, +\infty[$ و $D_{g \circ f} = \{x \in \mathbb{R} / x \geq 0\}$

$$D_{g \circ f} = \{x \in \mathbb{R} / x \in D_f \text{ و } f(x) \in D_g\}$$

$$D_{g \circ f} = \{x \in \mathbb{R} / x \in \mathbb{R} \text{ و } f(x) \in [0, +\infty[\}$$

$$D_{g \circ f} = \{x \in \mathbb{R} / x \in \mathbb{R} \text{ و } x+1 \in [0, +\infty[\}$$

$$D_{g \circ f} = \{x \in \mathbb{R} / x \geq -1\} \Leftrightarrow D_{g \circ f} = \{x \in \mathbb{R} / x+1 \geq 0\}$$

$$D_{g \circ f} = [-1; +\infty[$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x-1) = \sqrt{x-1}$$

تمرين 17: لتكن f و g الدالتين العدديتين المعرفتين كالتالي :

$$f(x) = x - 3 \text{ و } g(x) = \sqrt{x+1}$$

حدد : D_f و D_g و $D_{g \circ f}$ ثم أحسب $(g \circ f)(x)$

الجواب : $D_f = \mathbb{R}$

$$D_g = \{x \in \mathbb{R} / x+1 \geq 0\} = \{x \in \mathbb{R} / x \geq -1\} = [-1, +\infty[$$

$$D_{g \circ f} = \{x \in \mathbb{R} / x \in D_f \text{ و } f(x) \in D_g\}$$

$$D_{g \circ f} = \{x \in \mathbb{R} / x \in \mathbb{R} \text{ و } f(x) \in [-1, +\infty[\}$$

$$D_{g \circ f} = \{x \in \mathbb{R} / x-3 \in [-1, +\infty[\}$$

$$D_{g \circ f} = \{x \in \mathbb{R} / x \geq 2\} \Leftrightarrow D_{g \circ f} = \{x \in \mathbb{R} / x-3 \geq -1\}$$

$$D_{g \circ f} = [2; +\infty[$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x-3) = \sqrt{x-3+1} = \sqrt{x-2}$$

VII. رتبة دالة عددية

نشاط 1: لتكن f و g الدالتين العدديتين المعرفتين كالتالي :

$$f(x) = 4x - 3 \text{ و } g(x) = -3x + 2$$

أدرس رتبة f و g

أجوبة :

$$D_f = \mathbb{R} \text{ (لأنها دالة حدودية)}$$

$$D_g = \mathbb{R}$$

$$D_f = \mathbb{R}$$

$$D_f = \mathbb{R}$$

$$D_f = \mathbb{R}$$

$$D_f = \mathbb{R}$$

$$D_f = \mathbb{R}$$

(1) إذا كانت f دالة زوجية فان :

■ f تزايدية قطعا على المجال I إذا وفقط إذا كانت

f تناقصية قطعا على المجال I'

■ f تناقصية قطعا على المجال I إذا وفقط إذا كانت f

تزايدية قطعا على المجال I'

(2) إذا كانت f دالة فردية فان :

f لها نفس الرتبة على كل من المجالين I و I'

VIII. رتبة مركب الدالتين :

خاصية : لتكن f و g الدالتين عديتين معرفتين على التوالي

على المجالين I و J بحيث : $f(x) \in J$ ($\forall x \in I$) لدينا :

■ إذا كانت f تزايدية قطعا على I و g تزايدية قطعا على J

فان : $g \circ f$ تزايدية قطعا على I

■ إذا كانت f تناقصية قطعا على I و g تناقصية قطعا على J

فان : $g \circ f$ تزايدية قطعا على I

■ إذا كانت f تزايدية قطعا على I و g تناقصية قطعا على J

فان : $g \circ f$ تناقصية قطعا على I

■ إذا كانت f تناقصية قطعا على I و g تزايدية قطعا على J

فان : $g \circ f$ تناقصية قطعا على I

IX. التمثيل المبياني للدالتين $x \rightarrow \sqrt{x+a}$ و $x \rightarrow ax^3$:

مثال 1 : لتكن f الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة

كالتالي : $f(x) = \sqrt{x+2}$

1. حدد D_f مجموعة تعريف الدالة f

2. أدرس رتبة الدالة f على D_f وحدد جدول تغيرات f

3. أنشئ التمثيل المبياني للدالة f في معلم متعامد ممنظم .

(الجواب 1) : $D_f = \{x \in \mathbb{R} / x+2 \geq 0\} = \{x \in \mathbb{R} / x \geq -2\} = [-2, +\infty[$

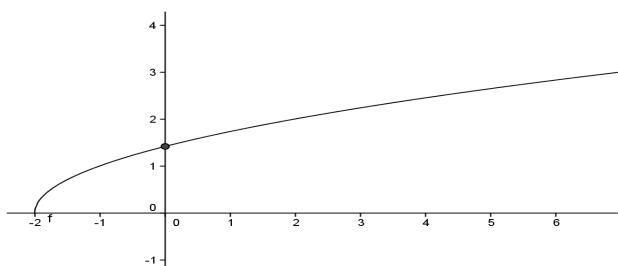
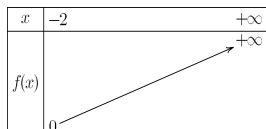
(2) ليكن : $x_1 \in [-2, +\infty[$ و $x_2 \in [-2, +\infty[$ بحيث $x_1 < x_2$

اذن : $x_1 + 2 < x_2 + 2$ ومنه $\sqrt{x_1 + 2} < \sqrt{x_2 + 2}$ أي $f(x_1) < f(x_2)$

ومنه الدالة f تزايدية على $[-2, +\infty[$

(3)

x	-2	-1	0	2	7
$f(x)$	0	1	$\sqrt{2}$	2	3



مثال 2 : لتكن f الدالة العددية للمتغير الحقيقي x

المعرفة كالتالي : $f(x) = \frac{1}{4}x^3$

1. حدد D_f مجموعة تعريف الدالة f و بين أن الدالة f تزايدية قطعا

على D_f

2. حدد جدول تغيرات f

ليكن : $x_1 \in \mathbb{R}$ و $x_2 \in \mathbb{R}$ بحيث $x_1 < x_2$

اذن : $4x_1 < 4x_2$ اذن : $4x_1 - 3 < 4x_2 - 3$

اذن : $f(x_1) < f(x_2)$

ومنه الدالة f تزايدية على $\mathbb{R}$

(2) $D_g = \mathbb{R}$ لأنها دالة حدودية

ليكن : $x_1 \in \mathbb{R}$ و $x_2 \in \mathbb{R}$ بحيث $x_1 < x_2$

اذن : $-3x_1 > -3x_2$ اذن : $-3x_1 + 2 > -3x_2 + 2$ اذن :

$g(x_1) > g(x_2)$

ومنه الدالة g تناقصية على $\mathbb{R}$

نشاط 2 : لتكن f الدالة العددية المعرفة كالتالي : $f(x) = 2x^2$

(1) حدد D_f

(2) أدرس رتبة f على كل من المجالين : $[0, +\infty[$ و $]-\infty, 0]$

(3) حدد جدول تغيرات

أجوبة : (1) $D_f = \mathbb{R}$ لأنها دالة حدودية

(2) أ) دراسة رتبة الدالة f على المجال $[0, +\infty[$:

ليكن : $x_1 \in [0, +\infty[$ و $x_2 \in [0, +\infty[$ بحيث $x_1 < x_2$

اذن : $x_1^2 < x_2^2$ ومنه $2x_1^2 < 2x_2^2$ أي $f(x_1) < f(x_2)$

ومنه الدالة f تزايدية على $[0, +\infty[$

ب) دراسة رتبة الدالة f على المجال $]-\infty, 0]$:

ليكن : $x_1 \in]-\infty, 0]$ و $x_2 \in]-\infty, 0]$ بحيث $x_1 < x_2$

اذن : $x_1^2 > x_2^2$ ومنه $2x_1^2 > 2x_2^2$ أي $f(x_1) > f(x_2)$

ومنه الدالة f تناقصية على $]-\infty, 0]$

(3) حدد جدول تغيرات الدالة f .

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$		0	

منحى تغيرات دالة عددية

تعريف : لتكن f دالة عددية و I مجالا ضمن مجموعة تعريفها.

• f تزايدية قطعا على المجال I إذا وفقط إذا كان :

$(\forall (x_1, x_2) \in I^2) (x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2))$

• f تناقصية قطعا على المجال I إذا وفقط إذا كان :

$(\forall (x_1, x_2) \in I^2) (x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2))$

• f ثابتة على المجال I إذا وفقط إذا كان :

$(\forall (x_1, x_2) \in I^2) f(x_1) = f(x_2)$

ملحوظة : يمكن دراسة رتبة دالة f على مجال I بدراسة إشارة معدل

التغير : $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$

مع x_1 و x_2 عنصرين مختلفين من I

• نقول إن f دالة رتيبة على I إذا كانت f تزايدية قطعا أو تناقصية

قطعا على مجال I .

خاصية : لتكن f دالة عددية مجموعة تعريفها D_f متماثلة بالنسبة للصفر.

ليكن I مجالا من $\mathbb{R}^+$ ضمن D_f و I'

متماثل I بالنسبة للصفر

3. أنشئ التمثيل المبياني للدالة f في معلم متعامد ممنظم .

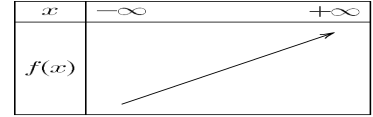
الجواب (1): $D_f = \mathbb{R}$ لأنها دالة حدودية

ليكن : $x_1 \in \mathbb{R}$ و $x_2 \in \mathbb{R}$ بحيث $x_1 < x_2$

اذن : $x_1^3 < x_2^3$ ومنه $\frac{1}{4}x_1^3 < \frac{1}{4}x_2^3$ أي $f(x_1) < f(x_2)$

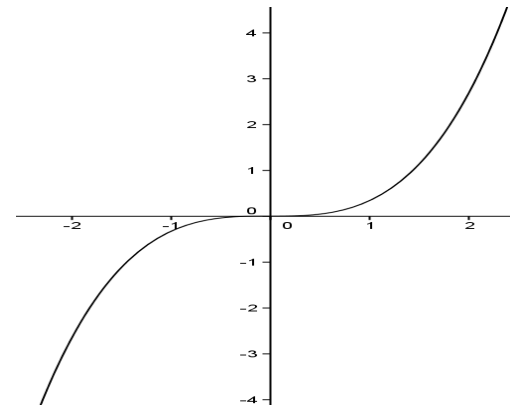
ومنه الدالة f تزايدية على $\mathbb{R}$

(2)



(3)

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	6.5	-2	$-\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	2	6.5



تمارين للبحث:

تمرين 1: نعتبر الدالتين f و g المعرفتين كالتالي :

$$g(x) = \frac{2x+1}{x-2} \quad \text{و} \quad f(x) = \frac{1}{x}$$

1. حدد $D_{g \circ f}$ حيز تعريف الدالة $g \circ f$

2. حدد صيغة الدالة $g \circ f$

تمرين 2: نعتبر الدالتين f و g المعرفتين كالتالي : $f(x) = x^2 + 2$ و $g(x) = \sqrt{x}$

1. حدد صيغة الدالة $g \circ f$

2. تأكد أن الدالة $g \circ f$ زوجية

3. أدرس رتبة كل من الدالتين f و g

تمرين 3: لتكن f الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة كالتالي : $f(x) = -\frac{1}{2}x^3$

1. حدد D_f مجموعة تعريف الدالة f

2. بين أن الدالة f تناقصية قطعاً على D_f و حدد جدول تغيرات f

3. أنشئ التمثيل المبياني للدالة f في معلم متعامد ممنظم .