

السنة 1 بكالوريا علوم تجريبية	مبادئ في المنطق حلول مقترحة	سلسلة 2
تمرين 1: $\hat{A}$ و $\hat{B}$ و $\hat{C}$ هي قياسات زوايا مثلث. نفترض أن: $\hat{A} \leq 60^\circ$ أو $\hat{B} \leq 60^\circ$ أو $\hat{C} \leq 60^\circ$ إذن: $\hat{A} > 60^\circ$ أو $\hat{B} > 60^\circ$ أو $\hat{C} > 60^\circ$ إذن: $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} > 180^\circ$ وهذا غير ممكن لأننا نعلم أن مجموع قياسات زوايا أي مثلث يساوي 180°		
تمرين 2: (1) ليكن أن $\forall x \in]0; +\infty[\quad x + \frac{1}{x} \geq 2$ لدينا: $\forall x \in]0; +\infty[\quad x + \frac{1}{x} - 2 = \frac{x^2 + 1 - 2x}{x} = \frac{(x-1)^2}{x} \geq 0$ إذن: $\forall x \in]0; +\infty[\quad x + \frac{1}{x} \geq 2$ (2) ليكن a و b عددين حقيقيين موجبين قطعاً نفترض أن كلا العددين $a + \frac{1}{b}$ و $b + \frac{1}{a}$ أصغر من 2. إذن: $a + \frac{1}{b} < 2$ و $b + \frac{1}{a} < 2$ إذن: $a + \frac{1}{b} + b + \frac{1}{a} < 4$ منه: $\left(a + \frac{1}{a}\right) + \left(b + \frac{1}{b}\right) < 4$ وحسب السؤال السابق نستنتج أن: $a + \frac{1}{a} \geq 2$ و $b + \frac{1}{b} \geq 2$ منه: $\left(a + \frac{1}{a}\right) + \left(b + \frac{1}{b}\right) \geq 4$ إذن: $4 \leq \left(a + \frac{1}{a}\right) + \left(b + \frac{1}{b}\right) < 4$ وهذا غير ممكن، إذاً أحد العددين $a + \frac{1}{b}$ أو $b + \frac{1}{a}$ أكبر من أو يساوي 2		
تمرين 3: ليكن x و y عددين حقيقيين غير منعدمين، لنبين أن: $(x = y \text{ أو } xy = 1) \Rightarrow x + \frac{1}{x} = y + \frac{1}{y}$ $x + \frac{1}{x} = y + \frac{1}{y} \Rightarrow x - y + \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = 0 \Rightarrow (x - y) + \frac{y - x}{xy} = 0 \Rightarrow (x - y) \left(1 - \frac{1}{xy}\right) = 0$ لدينا: $\Rightarrow \left(x - y = 0 \text{ ou } 1 - \frac{1}{xy} = 0\right) \Rightarrow \left(x = y \text{ ou } 1 = \frac{1}{xy}\right) \Rightarrow (x = y \text{ ou } xy = 1)$		
تمرين 4: (1) لنبين أن: $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad x + y < 2 \Rightarrow (x \geq 1 \text{ أو } y \geq 1)$ لدينا: $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad x + y < 2 \Rightarrow (x \geq 1 \text{ أو } y \geq 1)$ إذن: $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad (x < 1 \text{ et } y < 1) \Rightarrow x + y < 2$ (2) لنبين أن: $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad (x \neq 1 \text{ و } y \neq 1) \Rightarrow xy + 1 \neq x + y$ لدينا: $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad xy + 1 = x + y \Rightarrow xy - x + 1 - y = 0 \Rightarrow x(y - 1) - (y - 1) = 0 \Rightarrow (y - 1)(x - 1) = 0$ $\Rightarrow (y - 1 = 0 \text{ ou } x - 1 = 0) \Rightarrow x = 1 \text{ ou } y = 1$ بالتالي: $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad (x \neq 1 \text{ و } y \neq 1) \Rightarrow xy + 1 \neq x + y$ الاستلزام المضاد للعكس هو عبارة مكافئة للعبارة المراد البرهان على صحتها و ليس نفيا لها عكس ما قد يوحي به اسم هذا النوع من البرهان.		

تمرين 5: مستعملا برهانا بفصل الحالات بين أن :

- (1) لنبين أن لكل عدد صحيح طبيعي n ، $n + n^{2015}$ عدد زوجي
- إذا كان n زوجيا فإن n^{2015} عدد زوجي، إذن $n + n^{2015}$ عدد زوجي
 - إذا كان n فرديا فإن n^{2015} عدد فردي، إذن $n + n^{2015}$ عدد زوجي
- في جميع الحالات نجد أن $n + n^{2015}$ عدد زوجي

(2) لنبين أن $\forall x \in \mathbb{R} \quad x^4 - x + 1 \geq 0$

- إذا كان $x \geq 1$ فإن $x^3 \geq 1$ منه $x^3 - 1 \geq 0$ منه $x(x^3 - 1) \geq 0$ منه: $x^4 - x + 1 = x(x^3 - 1) + 1 \geq 1 > 0$
 - إذا كان $x < 1$ فإن $1 - x > 0$ منه: $x^4 - x + 1 = x^4 + (1 - x) \geq 0$
- في جميع الحالات نجد أن $x^4 - x + 1 \geq 0$

(3) لنبين أن $\forall x \in \mathbb{R} \quad |x - 1| + |x + 1| \geq 2$

- إذا كان $x \leq -1$ فإن: $x - 1 \leq -2 < 0$ و $x + 1 \leq 0$ منه: $|x - 1| + |x + 1| = -x + 1 - x - 1 = -2x \geq 2$ فإن: $-2x \geq 2$ منه: $|x - 1| + |x + 1| \geq 2$
 - إذا كان $-1 < x \leq 1$ فإن: $x - 1 \leq 0$ و $x + 1 > 0$ منه: $|x - 1| + |x + 1| = -x + 1 + x + 1 = 2 \geq 2$
 - إذا كان $x > 1$ فإن: $x - 1 > 0$ و $x + 1 > 0$ منه: $|x - 1| + |x + 1| = x - 1 + x + 1 = 2x > 2$
- في جميع الحالات نجد أن $|x - 1| + |x + 1| \geq 2$

تمرين 6:

- (1) لنبين أن لكل عدد صحيح طبيعي n ، $4^n - 1$ مضاعف للعدد 3
- بالنسبة لـ $n = 0$: $4^0 - 1 = 1 - 1 = 0$ و 0 مضاعف للعدد 3
 - نفترض أن $4^n - 1$ مضاعف للعدد 3 ونبين أن $4^{n+1} - 1$ مضاعف للعدد 3
- بما أن $4^n - 1$ مضاعف للعدد 3 فإن $4^n - 1 = 3k$ حيث $k \in \mathbb{N}$
- منه: $4^n = 3k + 1$ منه: $4^{n+1} - 1 = 4 \times 4^n - 1 = 4(3k + 1) - 1 = 12k + 4 - 1 = 12k + 3 = 3(4k + 1)$
- إذن: $4^{n+1} - 1$ مضاعف للعدد 3

(2) لنبين أن لكل عدد صحيح طبيعي n ، $21^n - 4^n$ يقسم 17

- بالنسبة لـ $n = 0$: $21^0 - 4^0 = 1 - 1 = 0$ و 17 قاسم لـ 0
 - نفترض أن $21^n - 4^n$ يقسم 17 ونبين أن $21^{n+1} - 4^{n+1}$ يقسم 17
- بما أن $21^n - 4^n$ يقسم 17 فإن $21^n - 4^n = 17k$ حيث $k \in \mathbb{N}$
- منه: $21^n = 4^n + 17k$ منه:
- $$21^{n+1} - 4^{n+1} = 21 \times 21^n - 4 \times 4^n = 21(4^n + 17k) - 4 \times 4^n = 21 \times 4^n + 21 \times 17k - 4 \times 4^n$$
- $$= (21 - 4) \times 4^n + 21 \times 17k = 17 \times 4^n + 21 \times 17k = 17(4^n + 21k)$$
- إذن: $21^{n+1} - 4^{n+1}$ يقسم 17

(3) لنبين أن لكل عدد صحيح طبيعي n ، 6 يقسم $n^3 - n$

- بالنسبة لـ $n = 0$ العبارة صحيحة لأن 0 مضاعف لـ 6
- نفترض أن $n(n+1)(n+2)$ مضاعف لـ 6 ، ولنبين أن $(n+1)(n+2)(n+3)$ مضاعف لـ 6
- لدينا $n(n+1)(n+2) = 6a$ ، إذن: $n(n+1)(n+2) = 6a$ حيث $a \in \mathbb{N}$
- ومنه: $(n+1)(n+2)(n+3) = (n+3)(n+1)(n+2) = n(n+1)(n+2) + 3(n+1)(n+2) = 6a + 3(n+1)(n+2)$
- وبما أن جذاء عددين متتابعين هو عدد زوجي فإن: $(n+1)(n+2) = 2b$ حيث $b \in \mathbb{N}$
- منه: $(n+1)(n+2)(n+3) = 6a + 6b = 6(a+b)$ وحيث أن: $(a+b) \in \mathbb{N}$
- فإن: $(n+1)(n+2)(n+3)$ مضاعف لـ 6

(4) لنبين أن: $2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^n = 2^{n+1} - 2$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$

- بالنسبة لـ $n = 1$ العبارة صحيحة لأن $2 = 2^{1+1} - 2$
- نفترض أن $2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^n = 2^{n+1} - 2$ ، ولنبين أن $2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{n+1} = 2^{n+2} - 2$
- لدينا $2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{n+1} = 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^n + 2^{n+1} = 2^{n+1} - 2 + 2^{n+1} = 2 \times 2^{n+1} - 2 = 2^{n+2} - 2$

(5) $\forall n \in \mathbb{N} \quad 3^n > n$

- بالنسبة لـ $n = 0$ العبارة صحيحة لأن $3^0 = 1 > 0$
- نفترض أن $3^n > n$ ، ولنبين أن $3^{n+1} > n+1$
- لدينا: $3^n > n \Rightarrow 3^n - n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow 3^n - n \geq 1 \Rightarrow 3^n \geq n+1$
- $\Rightarrow 3 \times 3^n \geq 3n+3 \Rightarrow 3^{n+1} \geq n+1 + (2n+2) > n+1$

(6) $\forall n \in \mathbb{N} \quad 1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

- بالنسبة لـ $n = 1$ العبارة صحيحة لأن $1^2 = 1 = \frac{1 \times 2 \times 3}{6}$
- نفترض أن $1 + 4 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ ، ولنبين أن $1 + 4 + \dots + n^2 + (n+1)^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2(n+1)+1)}{6}$
- لدينا $1 + 4 + \dots + n^2 + (n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 = \frac{n+1}{6} (n(2n+1) + 6(n+1))$
- $= \frac{n+1}{6} (2n^2 + n + 6n + 6) = \frac{(n+1)(2n^2 + 4n + 3n + 6)}{6}$
- $= \frac{(n+1)(n+1)(2n(n+2) + 3(n+2))}{6} = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$