

السنة 1 بكالوريا علوم تجريبية	مبادئ في المنطق حلول مقترحة	سلسلة 1
تمرين 1: اكتب العبارات التالية مستعملا المكملين الكوني و الوجودي : (A_1) : "مهما يكن العدد الموجب a و مهما يكن العدد السالب b فإن $a+b$ سالب". $A_1 :$ $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^- \quad a+b \leq 0$ أو أيضا $A_1 :$ $\forall a \in \mathbb{R}^+ \quad \forall b \in \mathbb{R}^- \quad a+b \leq 0$ (A_2) : "يوجد على الأقل عدد حقيقي موجب x يكون مربعه أكبر من 34". $A_2 :$ $\exists x \in \mathbb{R}^+ \quad x^2 > 34$ (A_3) : "يوجد عدد صحيح طبيعي وحيد n مربعه أصغر من 78 وأكبر من 23". $A_3 :$ $\exists! n \in \mathbb{N} \quad 23 < n^2 < 78$ (A_4) : "مهما يكن العدد الصحيح الطبيعي n فإنه يوجد على الأقل عدد صحيح طبيعي m مربعه n ". $A_4 :$ $\forall n \in \mathbb{N} \quad \exists m \in \mathbb{N} \quad m^2 = n$ (A_5) : "يوجد عدد حقيقي a بحيث مهما يكن العدد الحقيقي x فإن $x^2 \geq a$ ". $A_5 :$ $\exists a \in \mathbb{R} \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad x^2 \geq a$ (A_6) : "يوجد عدد حقيقي b ويوجد عدد حقيقي x يحققان : $b \leq x$ ". $A_6 :$ $\exists (b,x) \in \mathbb{R}^2 \quad b \leq x$ أو أيضا $A_6 :$ $\exists b \in \mathbb{R} \quad \exists x \in \mathbb{R} \quad b \leq x$		
تمرين 2: اعط نفى العبارات التالية دون تحديد قيمة حقيقتها :		
العبارة	نفىها	
$\exists x \in \mathbb{R}^+ \quad x^3 = 8$	$\forall x \in \mathbb{R}^+ \quad x^3 \neq 8$	
$\forall x > 0 \quad \frac{1}{x} + x \geq 2$	$\exists x > 0 \quad \frac{1}{x} + x < 2$	
$\exists a > 0 \quad \exists b > 0 \quad 2ab = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$	$\forall a > 0 \quad \forall b > 0 \quad 2ab \neq \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$	
$\forall x > 0 \quad \frac{1}{x} \neq 7$	$\exists x > 0 \quad \frac{1}{x} = 7$	
$\exists y \in [1;4] \quad 5 < y \leq 13$	$\forall y \in [1;4] \quad (y \leq 5 \text{ ou } y > 13)$	
$\forall p \in \mathbb{N} \quad \forall q \in \mathbb{N}^* \quad \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$	$\exists p \in \mathbb{N} \quad \exists q \in \mathbb{N}^* \quad \frac{p}{q} \notin \mathbb{Q}$	
$\exists p \in \mathbb{N} \quad (p^2 = 5 \text{ ou } p^2 > 10)$	$\forall p \in \mathbb{N} \quad (p^2 \neq 5 \text{ et } p^2 \leq 10)$	
$\forall x \in \mathbb{R}^* \quad \left(x + \frac{1}{x} = 2 \Rightarrow x = 1 \right)$	$\exists x \in \mathbb{R}^* \quad \left(x + \frac{1}{x} = 2 \text{ et } x \neq 1 \right)$	
$\forall x \in \mathbb{R} \quad (x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0)$	$\exists x \in \mathbb{R} \quad (x^2 = 0 \text{ et } x \neq 0) \text{ ou } (x = 0 \text{ et } x^2 \neq 0)$	
أثناء نفى عبارة رياضية يجب مراعاة القواعد التالية: عند نفى أحد المكملين الكوني $\forall$ أو الوجودي $\exists$ لان نفى العبارة المرتبطة به (مثلا نفى $\forall x \in \mathbb{R}$ هي $\exists x \in \mathbb{R}$ وليس $\exists x \notin \mathbb{R}$ لان نفى الكتابات المختصرة إلا بعد إرجاعها لصيغتها الأصلية: مثلا نفى $1 < a < 2$ هي $(a \leq 1 \text{ أو } a \geq 2)$ وليس $1 \geq a \geq 2$ لأن هذه الكتابة هي مجرد اختصار للكتابة $(a < 2 \text{ و } a > 1)$ العبارة $p \Rightarrow q$ تكافئ $p \text{ ou } \neg q$ لذلك نفىها هو $p \text{ et } \neg q$ العبارة $p \Leftrightarrow q$ تكافئ $(p \Rightarrow q) \text{ et } (q \Rightarrow p)$ لذلك نفىها هو $\neg(p \Rightarrow q) \text{ ou } \neg(q \Rightarrow p)$ أي $(p \text{ et } \neg q) \text{ ou } (q \text{ et } \neg p)$		

تمرين 3 : حدد حقيقة العبارات التالية :

العبارة	حقيقتها	التعليل
$\exists x \in \mathbb{R} \quad x^2 + 1 = 0$	خاطئة	العبارة تعني وجود عدد حقيقي مربعه يساوي -1 وهذا غير ممكن لأن مربع أي عدد حقيقي يكون دائما موجبا
$\exists x \in \mathbb{R} \quad \exists y \in \mathbb{R} \quad x + y = 0$	صحيحة	نأخذ مثلا : $x = 7$ و $y = -7$
$\forall x \in \mathbb{R} \quad \sqrt{x^2} = x$	خاطئة	إذا أخذنا عددا سالبا مثل $-1 \in \mathbb{R}$ فسنجد أن : $\sqrt{(-1)^2} = \sqrt{1} = 1 \neq -1$
$\forall x \in \mathbb{R} \quad (x^2 + 2x = -1 \Leftrightarrow x = -1)$	صحيحة	$x^2 + 2x = -1 \Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow (x+1)^2 = 0$ $\Leftrightarrow x+1 = 0 \Leftrightarrow x = -1$
$\forall x \in \mathbb{R} \quad (x^2 = 4 \Rightarrow x = 2)$	خاطئة	إذا أخذنا العدد $-2 \in \mathbb{R}$ فسنجد أن : $(-2)^2 = 4$ لكن مع ذلك $-2 \neq 2$
$\forall x \in \mathbb{R}^+ \quad (x^2 = 4 \Rightarrow x = 2)$	صحيحة	هذه المرة العبارة صحيحة لكون مجموعة الانتماء هي مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة، وهذا هو التعليل: $x^2 = 4 \Rightarrow x^2 - 2^2 = 0 \Rightarrow (x-2)(x+2) = 0$ $\Rightarrow x-2 = 0 \text{ ou } x+2 = 0$ $\Rightarrow x = 2 \text{ ou } x = -2$ ولكون $x \in \mathbb{R}^+$ فإن الحالة $x = -2$ غير ممكنة
$\exists a \in \mathbb{R} \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad x^2 \geq a$	صحيحة	نأخذ $a = 0$ فنجد أن العبارة تصبح $\forall x \in \mathbb{R} \quad x^2 \geq 0$ والتي نعلم أنها صحيحة، مما يؤكد وجود عدد حقيقي على الأقل يحقق العبارة
$\exists (a, b) \in \mathbb{N}^2 \quad (2a+1)^{2015} = 2014b$	خاطئة	نعلم أن $2014b = 2 \times (1007b)$ عدد زوجي و $(2a+1)^{2015}$ عدد فردي (لأنه عبارة عن قوة عدد فردي) إذن المتساوية الموجودة بالعبارة غير ممكنة

📌 تحديد حقيقة عبارة رياضية أمر غير يسير ، يتطلب فهما و استيعاب العبارة جيدا قصد إيجاد التعليل المناسب (مثال مضاد...)

تمرين 4 : لتكن P و Q عبارتين.

P	Q	$(P \text{ و } Q)$	$(P \text{ و } Q) \Rightarrow P$
F	F	F	V
F	V	F	V
V	F	F	V
V	V	V	V

P	Q	$\neg P$	$\neg P \Rightarrow Q$	$P \Rightarrow (\neg P \Rightarrow Q)$
F	F	V	F	V
F	V	V	V	V
V	F	F	V	V
V	V	F	V	V

بما أن العبارتان $P \Rightarrow (\neg P \Rightarrow Q)$ و $(P \text{ و } Q) \Rightarrow P$ صحيحتان مهما كانت حقيقة العبارتين P و Q فإنها قوانين منطقية.