

الأستاذ:
نجيب
عثماني

تمارين محلولة: المنطق
المستوى : الأولى باك علوم تجريبية

أكاديمية
الجهة
الشرقية

تمرين 1:

(1) أنقل الجدول التالي ثم ضع العلامة "x" في الخانة المناسبة .

صحيح	خاطئ
	كل زوجي قابل للقسمة على 4
	مجموع عددين فرديين هو عدد زوجي
	$\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$
	إذا كان n^2 عددا فرديا فإن n عدد فردي
	المعادلة : $x^2 = -1$ تقبل حلا في $\mathbb{R}$
	جميع المستقيمات المتعامدة في الفضاء متقاطعة
	114516 مضاعف للعدد 4
	$((-2)^2 = -4)$

(2) هل توجد من بين الجمل الواردة في الجدول أعلاه جمل صحيحة و خاطئة في آن واحد ؟

الأجوبة: (1)

صحيح	خاطئ
	x
x	
	x
x	
	x
	x
x	
	x
x	

(2) كل النصوص الرياضية إما صحيحة و إما خاطئة وتسمى عبارات

وجداول حقيقة عبارة

تمرين 2:

حدد العبارة النافية و قيمة حقيقة كل عبارة من العبارات الآتية:

$p \quad ((-2)^2 = 4)$

$q \quad \sqrt{2} \in \mathbb{Q}$

الأجوبة: p عبارة صحيحة : $((-2)^2 \neq 4)$: $\bar{p}$

q عبارة خاطئة : $(\sqrt{2} \notin \mathbb{Q})$: $\bar{q}$

تمرين 3: حدد العبارة النافية و قيمة حقيقة كل عبارة من العبارات الآتية :

$p \quad ((-2)^2 = 4)$ و $(\sqrt{3} \geq 1)$

$q \quad \frac{1}{2} \in \mathbb{N}$ و $(\frac{7}{2} > 3)$

الأجوبة:

نستعمل جدول حقيقة العطف المنطقي

العبارة p مكونة من عبارتين صحيحتين

اذن هي عبارة صحيحة أنظر جدول

عملية العطف المنطقي:

p	q	p و q
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

تمرين 4:

حدد قيمة حقيقة العبارات الآتية :

$A \quad ((-2)^2 > 3)$ و $(\sqrt{3} \geq 1)$

$B \quad \sqrt{2} \in \mathbb{Q}$ و $(\sqrt{3} + \sqrt{2} > 3)$

$C \quad ((\pi = 3.14))$ و $(\sqrt{2} \leq 1)$

الأجوبة:

نستعمل جدول عملية العطف المنطقي لتحديد قيمة الحقيقة

A عبارة صحيحة : لأنها مكونة من عبارتين صحيحتين

B عبارة خاطئة : لأنها عطف عبارة صحيحة مع خاطئة

C عبارة خاطئة : لأنها فصل عبارتين خاطئتين

تمرين 5: حدد قيمة الحقيقة و العبارة النافية لكل عبارة من العبارات الآتية :

$A \quad ((-2)^2 = -4)$ أو $(\frac{5}{2} \geq 1)$

$B \quad (5 < 3)$ أو $(-3 \in \mathbb{N})$

الأجوبة:

نستعمل جدول حقيقة الفصل المنطقي

A عبارة صحيحة : لأنها مكونة من

عبارة صحيحة و عبارة خاطئة

B عبارة خاطئة: لأنها فصل

عبارتين خاطئتين

$\bar{A} \quad ((-2)^2 \neq -4)$ و $(\frac{5}{2} < 1)$

$\bar{B} \quad (5 \geq 3)$ و $(-3 \notin \mathbb{N})$

p	q	p أو q
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

p	q	$\bar{p}$	$\bar{p} \text{ أو } q$	$(p \Rightarrow q)$
1	1			
1	0			
0	1			
0	0			

2) ألاحظ أن العبارتان $(p \Rightarrow q)$ و $\bar{p} \text{ أو } q$ متكافئتان

تمرين 10:

حدد نفي العبارة الآتية: " $x = -3$ أو $x^2 = 9 \Rightarrow x = 3$ "

الجواب: $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow \bar{p} \text{ أو } q$

ومنه نفي $(p \Rightarrow q)$ هي العبارة $\bar{p} \text{ و } q$

ومنه $(x \neq -3 \text{ و } x \neq 3) \text{ و } x^2 = 9$

تمرين 11: حدد قيمة حقيقة كل عبارة من العبارات الآتية :

$$p \left(2\sqrt{3} \geq \sqrt{10} \right) \Leftrightarrow \left((5\sqrt{2})^2 = 50 \right)$$

$$q \quad -6 \in \mathbb{N} \Leftrightarrow (1 \geq 3)$$

الأجوبة: نستعمل جدول حقيقة التكافؤ المنطقي
عبارة صحيحة :

p	q	$p \Leftrightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

لأن $(5\sqrt{2})^2 = 50$ و $(2\sqrt{3} \geq \sqrt{10})$

صحيحتين معا

q عبارة صحيحة : لأنها فصل
عبارتين خاطئتين

تمرين 12: نعتبر التعبير التالي :

$$(x \in \mathbb{R}); x^2 - x \geq 0$$

(1) حدد قيمة حقيقة التعبير من أجل $x = 2$

(2) حدد قيمة حقيقة التعبير من أجل $x = \frac{1}{2}$

(3) حدد قيمة حقيقة التعبير من أجل $x = -1$

(4) هل التعبير صحيح أم خاطئ؟

الأجوبة: (1) من أجل $x = 2$ نجد : $2 \geq 0$

ومنه نحصل على عبارة صحيحة

(2) من أجل $x = \frac{1}{2}$ نجد : $-\frac{1}{4} \geq 0$

ومنه نحصل على عبارة خاطئة

(3) من أجل $x = -1$ نجد : $2 \geq 0$

ومنه نحصل على عبارة صحيحة

(4) التعبير : $(x \in \mathbb{R}); x^2 - x \geq 0$ يصبح صحيحا

من أجل بعض قيم x من $\mathbb{R}$ خاطئا من أجل بعض قيم x

نقول أننا أمام دالة عبارية تحتوي على متغير x

ينتمي إلى المجموعة $\mathbb{R}$ ونكتب : $\exists x \in \mathbb{R} / x^2 - x \geq 0$

ونقرأ يوجد x من $\mathbb{R}$ بحيث $x^2 - x \geq 0$

تمرين 13: نعتبر التعبير التالي : $n^2 \geq 0$; $(n \in \mathbb{N})$

(1) حدد قيمة حقيقة التعبير من أجل $n = 2$

(2) هل توجد قيم n : لا تحقق التعبير السابق؟

الأجوبة: (1) من أجل $n = 2$ نحصل : على عبارة صحيحة

(2) نلاحظ أننا نحصل على عبارة صحيحة مهما تكن قيمة المتغير n

نكتب : $\forall n \in \mathbb{N} / n^2 \geq 0$

تمرين 6: حدد قيمة الحقيقة و العبارة النافية لكل عبارة من العبارات الآتية :

$$A \left(\frac{1}{2} \in \mathbb{N} \right) \text{ أو } (\sqrt{4} = 2)$$

$$B \left((-2)^2 > 3 \right) \text{ أو عدد فردي}$$

$$C \left(\sqrt{2} \leq 1 \right) \text{ أو } (\pi = 3.14)$$

الأجوبة: نستعمل جدول حقيقة الفصل المنطقي

A عبارة صحيحة : لأن $(\sqrt{4} = 2)$ عبارة صحيحة

B عبارة صحيحة : لأنها فصل عبارتين صحيحتين

C عبارة خاطئة : لأنها فصل عبارتين خاطئتين

$$\bar{A} \left(\sqrt{4} \neq 2 \right) \text{ و } \left(\frac{1}{2} \notin \mathbb{N} \right)$$

$$\bar{B} \left((-2)^2 \leq 3 \right) \text{ و عدد زوجي}$$

$$\bar{C} \left(\sqrt{2} > 1 \right) \text{ و } (\pi \neq 3.14)$$

تمرين 7: حدد قيمة حقيقة كل عبارة من العبارات الآتية :

$$A \Rightarrow (0, 1 \in \mathbb{N}) \Rightarrow (2 \text{ عدد فردي})$$

$$B \Rightarrow (-1 \in \mathbb{N}) \Rightarrow (4 \text{ عدد زوجي})$$

الأجوبة: نستعمل جدول حقيقة

الاستلزام المنطقي

A عبارة صحيحة

B عبارة خاطئة

p	q	$p \Rightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

تمرين 8: حدد قيمة حقيقة كل عبارة

من العبارات الآتية :

$$p \left(\sqrt{3} \geq 1 \right) \Rightarrow \left((-2)^2 = -4 \right)$$

$$q \left(\frac{6}{2} = 2 \right) \Rightarrow (\sqrt{5} < 3)$$

الأجوبة: نستعمل جدول حقيقة العطف المنطقي

p عبارة خاطئة :

لأن $(\sqrt{3} \geq 1)$ صحيحة

و $((-2)^2 = -4)$ خاطئة

q عبارة صحيحة : لأن $\left(\frac{6}{2} = 2 \right)$ خاطئة و $(\sqrt{5} < 3)$ صحيحة

تمرين 9: (1) أتمم ملاء الجدول التالي :

p	q	$\bar{p}$	$\bar{p} \text{ أو } q$	$(p \Rightarrow q)$
1	1	0	1	1
1	0	0	0	0
0	1	1	1	1
0	0	1	1	1

(2) ماذا تلاحظ؟

الأجوبة:

(1)

تمرين 14: حدد قيمة حقيقة كل عبارة من العبارات الآتية :

A " $(\forall x \in \mathbb{R}); x^2 > 0$ "

B " $(\forall n \in \mathbb{N}); 2^n > 5(n+1)$ "

C " $\exists x \in \mathbb{N}, 2x-1=0$ "

D " $(\forall n \in \mathbb{N}); \frac{n}{4} \notin \mathbb{N}$ "

E " $n > 4 \Rightarrow n > 2$ "

الأجوبة: A عبارة خاطئة : لأن 0 لا يحقق: $(x^2 > 0)$

B عبارة خاطئة : لأن 0 لا يحقق: $(2^n > 5(n+1))$

لأن $(2^0 < 5(0+1))$

C عبارة خاطئة : لأن $\frac{1}{2} \notin \mathbb{N}$

D عبارة خاطئة : لأن $\frac{4}{4} \in \mathbb{N}$

E عبارة خاطئة

تمرين 15: حدد قيمة حقيقة كل عبارة من العبارات الآتية :

1. " $\forall x \in \mathbb{R} / x^2 > 0$ "

2. " $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 - 2 = 0$ "

3. " 5 عدد فردي $\Leftrightarrow \exists x \in \mathbb{R}, x^2 + 1 = 0$ "

4. " $(2 < \sqrt{3}) \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} / \frac{n}{2} \in \mathbb{N}$ "

5. $(\forall x \in \mathbb{R}); -1 \leq \cos x \leq 1$

6. $(\forall n \in \mathbb{N}); (\exists m \in \mathbb{N}); n < m$

7. $2n+1$ عدد زوجي $(\exists n \in \mathbb{N})$

8. $(\forall n \in \mathbb{N}); \sqrt{n} \in \mathbb{N}$

9. $(\forall x \in \mathbb{R}); (\exists y \in \mathbb{R}); y - x > 0$

10. $(\exists! x \in \mathbb{R}); 2x + 4 = 0$

11. $(\exists! x \in \mathbb{R}); x^2 = 2$

12. $(\exists x \in \mathbb{Z}); \frac{x}{4} \in \mathbb{Z}$

13. $(\forall x \in \mathbb{R}); (\exists y \in \mathbb{R}); y^2 = x$

الأجوبة: (1) خاطئة (2) صحيحة (3) خاطئة (4) خاطئة (5) صحيحة

(6) صحيحة (7) خاطئة (8) خاطئة (9) صحيحة (10) صحيحة (11) خاطئة

(12) صحيحة (13) خاطئة نأخذ $x = -1$

تمرين 16: حدد العبارة النافية للعبارات الآتية :

(1) $(\forall n \in \mathbb{N}); \sqrt{n} \in \mathbb{N}$

(2) $(\exists x \in \mathbb{Z}); \frac{x}{4} \in \mathbb{Q} \text{ و } x^2 - 2 = 0$

(3) كل الأشجار غير مثمرة في المؤسسة

الأجوبة: (1) $(\exists n \in \mathbb{N}); \sqrt{n} \notin \mathbb{N}$

(2) $(\forall x \in \mathbb{Z}); \frac{x}{4} \notin \mathbb{Q} \text{ أو } x^2 - 2 \neq 0$

(3) توجد شجرة مثمرة في المؤسسة

تمرين 17: حدد العبارة النافية للعبارات الآتية (1:

$(\forall n \in \mathbb{N}); 2^n > 5(n+1)$

(2) " $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 - 2 = 0$ و $-\frac{3}{2} \in \mathbb{Q}$ "

(3) $(\forall n \in \mathbb{N}); (\exists m \in \mathbb{N}); n < m$ كل مثلث قائم الزاوية له زاوية حادة

(5) توجد نافذة في المؤسسة مكسورة (6) $n \in \mathbb{Z} \Rightarrow n \geq 0$ $(\forall n \in \mathbb{Z})$

الأجوبة: (1) $(\exists n \in \mathbb{N}); 2^n \leq 5(n+1)$

(2) $(\forall x \in \mathbb{R}); x^2 - 2 \neq 0$ و $-\frac{3}{2} \notin \mathbb{Q}$

(3) $(\exists n \in \mathbb{N}); (\forall m \in \mathbb{N}); n \geq m$

(4) يوجد مثلث قائم الزاوية له زاوية غير حادة

(5) كل نوافذ المؤسسة غير مكسورة (6) $n < 0$ و $n \in \mathbb{Z}$ $(\exists n \in \mathbb{Z})$

تمرين 18: حدد العبارة النافية للعبارات الآتية:

(1) $P; (\forall x \in \mathbb{R}); x \neq 2 \Rightarrow x^2 \neq 4$

(2) $Q; (\exists x \in \mathbb{R}); x < 2 \Rightarrow x^2 \geq 2015$

الأجوبة: (1) $\bar{P}; (\exists x \in \mathbb{R}); x \neq 2 \text{ و } x^2 = 4$

(2) $\bar{Q}; (\forall x \in \mathbb{R}); x < 2 \text{ و } x^2 < 2015$

تمرين 19: ليكن $x \in \mathbb{R}$ بين أن: $\sqrt{2} < x < 5 \Rightarrow 3 < x^2 + 1 < 26$

الأجوبة: نفترض أن: $\sqrt{2} < x < 5$ ونبين أن: $3 < x^2 + 1 < 26$

لدينا: $\sqrt{2} < x < 5$ إذن: $2 < x^2 < 25$ إذن: $3 < x^2 + 1 < 26$

ومنه: $\sqrt{2} < x < 5 \Rightarrow 3 < x^2 + 1 < 26$

تمرين 20: ليكن $x \in \mathbb{R}$ بين أن: $2\sqrt{3} < x < 10 \Rightarrow 9 < x^2 - 3 < 97$

الأجوبة: نفترض أن: $2\sqrt{3} < x < 10$ ونبين أن: $9 < x^2 - 3 < 97$

لدينا: $2\sqrt{3} < x < 10$ إذن: $12 < x^2 < 100$ إذن: $9 < x^2 - 3 < 97$

ومنه: $2\sqrt{3} < x < 10 \Rightarrow 9 < x^2 - 3 < 97$

تمرين 21: ليكن $x \in \mathbb{R}$ بين أن: $\frac{1}{3} < \frac{1}{x-1} < 1$ $2 < x < 4 \Rightarrow$

الأجوبة: نفترض أن: $2 < x < 4$ ونبين أن: $\frac{1}{3} < \frac{1}{x-1} < 1$

لدينا: $2 < x < 4$ إذن: $2-1 < x-1 < 4-1$

إذن: $1 < x-1 < 3$ إذن: $\frac{1}{3} < \frac{1}{x-1} < 1$

ومنه: $2 < x < 4 \Rightarrow \frac{1}{3} < \frac{1}{x-1} < 1$

تمرين 22: ليكن $x \in \mathbb{R}$ بين أن: $\frac{11}{2} < \frac{-3x+5}{x+4} < \frac{11}{3}$ $-2 < x < \frac{1}{3} \Rightarrow$

الأجوبة: نفترض أن: $-2 < x < \frac{1}{3}$ ونبين أن: $\frac{11}{2} < \frac{-3x+5}{x+4} < \frac{11}{3}$

لدينا: $-2 < x < \frac{1}{3}$ إذن: $-2+4 < x+4 < \frac{1}{3}+4$ إذن: $2 < x+4 < \frac{13}{3}$

إذن: $\frac{3}{13} < \frac{1}{x+4} < \frac{1}{2}$

ولدينا: $-2 < x < \frac{1}{3}$ إذن: $-6 < 3x < 1$ إذن: $-1 < -3x < 6$

إذن: $4 < -3x+5 < 11$

ومنه: $\frac{11}{2} < \frac{-3x+5}{x+4} < \frac{11}{3}$ ومنه: $\frac{-3x+5}{x+4} < \frac{11}{2}$

تمرين 23: بين العبارة التالية خاطئة مع تعليل الجواب:

" $p (\forall x \in \mathbb{R}^*); x + \frac{1}{x} \geq 2$ "

الأجوبة: نعتبر: $x = -2$ لدينا: $-2 + \frac{1}{-2} = -\frac{5}{2} < 2$

إذن: p خاطئة

تمرين 24: بين العبارة التالية خاطئة مع تعليل الجواب:

$$p : \forall x \in]0;1[\text{ و } \forall y \in]0;1[, 0 < \frac{x+y}{xy(1-xy)} < 1$$

الجواب: نعتبر: $x = \frac{1}{2}$ و $y = \frac{1}{2}$ لدينا: $\frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}}{\frac{1}{4} \left(1 - \frac{1}{4}\right)} = \frac{1}{\frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4}} = \frac{1}{\frac{3}{16}} = \frac{16}{3} > 1$

اذن: p خاطئة

تمرين 25: بين العبارة التالية خاطئة مع تعليل الجواب:

$$P : (\forall x \in \mathbb{R}); x^2 \geq x$$

الأجوبة: نعتبر: $x = \frac{1}{2}$ لدينا: $\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} < \frac{1}{2}$ اذن: p خاطئة

تمرين 26: ليكن $x \in \mathbb{R}$ و $y \in \mathbb{R}$

بين أن: $x + y > 1 \Rightarrow y > \frac{1}{2} \text{ و } x > \frac{1}{2}$

الجواب: نستعمل الاستدلال بالاستلزام المضاد للعكس

اذن يكفي أن نبين أن: $x + y \leq 1 \Rightarrow x \leq \frac{1}{2} \text{ و } y \leq \frac{1}{2}$ ؟؟؟؟

لدينا: $x \leq \frac{1}{2} \text{ و } y \leq \frac{1}{2} \Rightarrow x + y \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$ اذن: $x + y \leq 1$

ومنه: $x + y > 1 \Rightarrow y > \frac{1}{2} \text{ و } x > \frac{1}{2}$ وبالتالي: $x \leq \frac{1}{2} \text{ و } y \leq \frac{1}{2} \Rightarrow x + y \leq 1$

تمرين 27: بين باستعمال الاستدلال بالاستلزام المضاد للعكس أنه: اذا كان

$$x \in]1; +\infty[\text{ و } y \in]1; +\infty[$$

$$(x \neq y) \Rightarrow (x^2 - 2x \neq y^2 - 2y)$$

الجواب: نستعمل الاستدلال بالاستلزام المضاد للعكس

اذن يكفي أن نبين أن: $x^2 - 2x = y^2 - 2y \Rightarrow x = y$ ؟؟؟؟

لدينا: $x^2 - 2x = y^2 - 2y \Rightarrow x^2 - 2x - y^2 + 2y = 0$

$$\Rightarrow x^2 - y^2 - 2(x - y) = 0 \Rightarrow (x - y)(x + y) - 2(x - y) = 0$$

$$\Rightarrow (x - y)(x + y - 2) = 0 \Rightarrow x - y = 0 \text{ و } x + y - 2 = 0 \Rightarrow x = y \text{ و } x + y = 2$$

ونعلم أن: $x \in]1; +\infty[$ يعني $x > 1$ و: ونعلم أن: $x \in]1; +\infty[$ يعني $y > 1$

ومنه $x + y > 2$ يعني $x + y - 2 > 0$ ومنه $x + y - 2 \neq 0$

ومنه: $x^2 - 2x = y^2 - 2y \Rightarrow x = y$

وبالتالي: $(x \neq y) \Rightarrow (x^2 - 2x \neq y^2 - 2y)$

تمرين 28: ليكن: $x \in \mathbb{R}$ بين أن: $\frac{x+2}{x+5} \neq 2 \Rightarrow x \neq -8$

الجواب: نستعمل الاستدلال بالاستلزام المضاد للعكس

اذن يكفي أن نبين أن: $\frac{x+2}{x+5} = 2 \Rightarrow x = -8$ ؟؟؟؟

لدينا: $\frac{x+2}{x+5} = 2 \Rightarrow x + 2 = 2(x + 5)$

$$x + 2 = 2(x + 5) \Rightarrow x + 2 = 2x + 10 \Rightarrow -x = 8 \Rightarrow x = -8$$

ومنه: $\frac{x+2}{x+5} = 2 \Rightarrow x = -8$

تمرين 29: $x \in]1; +\infty[$ و $y \in]2; +\infty[$

بين أن: $(x \neq y) \Rightarrow (x^2 - 3x \neq y^2 - 3y)$

الجواب: نستعمل الاستدلال بالاستلزام المضاد للعكس

اذن يكفي أن نبين أن: $x^2 - 3x = y^2 - 3y \Rightarrow x = y$ ؟؟؟؟

لدينا: $x^2 - 3x = y^2 - 3y \Rightarrow x^2 - 3x - y^2 + 3y = 0$

$$\Rightarrow x^2 - y^2 - 3(x - y) = 0 \Rightarrow (x - y)(x + y) - 3(x - y) = 0$$

$$\Rightarrow (x - y)(x + y - 3) = 0 \Rightarrow x - y = 0 \text{ و } x + y - 3 = 0 \Rightarrow x = y \text{ و } x + y = 3$$

ونعلم أن: $x \in]1; +\infty[$ يعني $x > 1$ و: ونعلم أن: $y \in]2; +\infty[$

يعني $y > 2$ ومنه $x + y > 3$ يعني $x + y - 3 > 0$ ومنه $x + y - 3 \neq 0$

ومنه: $x^2 - 3x = y^2 - 3y \Rightarrow x = y$

وبالتالي: $(x \neq y) \Rightarrow (x^2 - 3x \neq y^2 - 3y)$

تمرين 30: بين أن: $(\forall a \in \mathbb{R}); (\forall b \in \mathbb{R}) a^2 + b^2 \geq 2ab$

الأجوبة: نستعمل الاستدلال بالتكافؤ:

$$a^2 + b^2 \geq 2ab \Leftrightarrow a^2 + b^2 - 2ab \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$(a - b)^2 \geq 0 \Leftrightarrow \text{وهذا صحيح لأن المربع دائما موجب}$$

وبالتالي: $(\forall a \in \mathbb{R}); (\forall b \in \mathbb{R}) a^2 + b^2 \geq 2ab$

تمرين 31: باستعمال الاستدلال بفصل الحالات:

حل في $\mathbb{R}$ المعادلة: $|3x - 6| = 1$ (E)

الأجوبة: ندرس اشارة: $3x - 6$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$3x - 6$	$-$	0	$+$

الحالة 1: اذا كانت: $x \geq 2$ فان: $3x - 6 \geq 0$

ومنه: $(E): |3x - 6| = 1$

$$x = \frac{7}{3} \in S \Leftrightarrow 3x = 7 \Leftrightarrow 3x - 6 = 1 \Leftrightarrow$$

الحالة 2: اذا كانت: $x \leq 2$ فان: $3x - 6 \leq 0$

ومنه: $(E): |3x - 6| = 1$

$$-3x + 6 = 1 \Leftrightarrow -(3x - 6) = 1 \Leftrightarrow$$

$$x = \frac{5}{3} \in S \Leftrightarrow -3x = -5 \Leftrightarrow$$

ومنه مجموعة الحلول هي: $S = \left\{\frac{5}{3}; \frac{7}{3}\right\}$

تمرين 32: باستعمال الاستدلال بفصل الحالات

حل في $\mathbb{R}$ المعادلة: $3 + 2|x - 4| = x + 5$

الجواب: ندرس اشارة: $x - 4$

الحالة 1: اذا كانت: $x \geq 4$ فان: $x - 4 \geq 0$ ومنه: $|x - 4| = x - 4$

$$x = 10 \in S \Leftrightarrow 3 + 2x - 8 = x + 5 \Leftrightarrow 3 + 2|x - 4| = x + 5$$

الحالة 2: اذا كانت: $x \leq 4$ فان: $x - 4 \leq 0$ ومنه: $|x - 4| = -x + 4$

$$x = 2 \in S \Leftrightarrow 3 - 2x + 8 = x + 5 \Leftrightarrow 3 + 2|x - 4| = x + 5$$

ومنه مجموعة الحلول هي: $S = \{2; 10\}$

تمرين 33: باستعمال الاستدلال بفصل الحالات

حل في $\mathbb{R}$ المعادلة: $x^2 - |x + 1| + 1 = 0$ (E)

الجواب: ندرس اشارة: $x + 1$

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$x + 1$	$-$	0	$+$

الحالة 1: اذا كانت: $x \geq -1$ فان: $x + 1 \geq 0$

ومنه: $(E): x^2 - |x + 1| + 1 = 0$

$$x(x - 1) = 0 \Leftrightarrow x^2 - x = 0 \Leftrightarrow x^2 - (x + 1) + 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$x = 0 \in S \text{ و } x = 1 \in S \Leftrightarrow$$

الحالة 2: اذا كانت: $x \leq -1$ فان: $x + 1 \leq 0$

$$(E): x^2 - |x+1| + 1 = 0 \text{ ومنه}$$

$$\Leftrightarrow x^2 + (x+1) + 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 + x + 2 = 0 \text{ وهذه المعادلة ليس لها}$$

$$\Delta = -7 < 0 \text{ لأن } \mathbb{R} \text{ حل في}$$

$$S = \{0; 1\} \text{ ومنه مجموعة الحلول هي}$$

تمرين 34: باستعمال الاستدلال بفصل الحالات. بين أن : $n^2 + n$

$$\forall n \in \mathbb{N} \text{ عدد زوجي}$$

الجواب : الحالة 1: n عدد زوجي إذن : $\exists k \in \mathbb{N} / n = 2k$

$$n^2 + n = (2k)^2 + 2k = 4k^2 + 2k = 2(2k^2 + k) = 2k'$$

$$\text{ومنه : } n^2 + n \text{ عدد زوجي}$$

الحالة 2: n عدد فردي إذن : $\exists k \in \mathbb{N} / n = 2k + 1$

$$n^2 + n = (2k + 1)^2 + 2k + 1 = 4k^2 + 4k + 1 + 2k + 1$$

$$= 4k^2 + 6k + 2 = 2(2k^2 + 3k + 1) = 2k' \text{ ومنه : } n^2 + n \text{ عدد زوجي}$$

$$\forall n \in \mathbb{N} \text{ وبالتالي : } n^2 + n \text{ عدد زوجي}$$

تمرين 35: بين باستعمال الاستدلال بالخلف أن : $\frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} \neq 1$

$$\forall x \in \mathbb{R} /$$

الأجوبة: لكي نبرهن أن عبارة صحيحة نفترض أن العبارة خاطئة

ونحاول الحصول على تناقض مع المعطيات

$$\text{نفترض أن : } \exists x \in \mathbb{R} / \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} = 1$$

$$\text{يعني } x^2 - 1 = x^2 + 1 \text{ يعني } -1 = +1 \text{ وهذا غير صحيح}$$

$$\text{ومنه ما افترضناه كان خاطئا أي : } \forall x \in \mathbb{R} / \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} \neq 1$$

تمرين 36: $n \in \mathbb{N}$ بين أنه إذا كان n^2 عدد زوجي

فإن : n عدد زوجي

الأجوبة: نفترض أن : n عدد فردي

$$\text{أي أن : } \exists k \in \mathbb{N} / n = 2k + 1$$

$$\text{ومنه : } n^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1 = 2k' + 1$$

$$\text{أي : } n^2 \text{ عدد فردي وهذا يتناقض مع المعطيات : } n^2 \text{ عدد زوجي}$$

$$\text{ومنه ما افترضناه كان خاطئا أي : } n \text{ عدد زوجي}$$

تمرين 37: بين باستعمال الاستدلال بالترجع أن : $\forall n \in \mathbb{N}; 3^n \geq 1 + 2n$

الجواب : نمر بثلاث مراحل :

المرحلة 1: نتحقق أن العبارة صحيحة بالنسبة ل $n = 0$

$$\text{لدينا } 3^0 \geq 1 + 2 \times 0 \text{ أي : } 1 \geq 1 \text{ ومنه العبارة صحيحة بالنسبة ل } n = 0$$

المرحلة 2: نفترض أن : $3^n \geq 1 + 2n$ صحيحة

المرحلة 3: نبين أن : $3^{n+1} \geq 1 + 2(n+1)$ أي نبين أن : $3^{n+1} \geq 2n + 3$ ؟؟

لدينا حسب افتراض التراجع :

$$3^n \geq 1 + 2n \text{ إذن : } 3^n \times 3 \geq 3 \times (1 + 2n)$$

$$\text{يعني : } 3^{n+1} \geq 6n + 3 \text{ إذن لم نجد بعد النتيجة}$$

$$\text{نلاحظ أن : } 6n + 3 \geq 2n + 1 \text{ (يمكن حساب الفرق)}$$

$$(6n + 3) - (2n + 1) = 6n + 3 - 2n - 1 = 4n + 2 \geq 0$$

$$\text{لدينا إذن : } 3^{n+1} \geq 6n + 3 \text{ و } 6n + 3 \geq 2n + 1 \text{ ومنه : } 3^{n+1} \geq 2n + 3$$

تمرين 38: بين باستعمال الاستدلال بالترجع أن : $\forall n \in \mathbb{N}; 2^n \geq 1 + n$

الجواب : نمر بثلاث مراحل :

المرحلة 1: نتحقق أن العبارة صحيحة بالنسبة ل $n = 0$

$$\text{لدينا } 2^0 \geq 1 + 0 \text{ أي : } 1 \geq 1 \text{ ومنه العبارة صحيحة بالنسبة ل } n = 0$$

المرحلة 2: نفترض أن : $2^n \geq 1 + n$ صحيحة

المرحلة 3: نبين أن : $2^{n+1} \geq 1 + (n+1)$ أي نبين أن : $2^{n+1} \geq n + 2$ ؟

$$\text{لدينا حسب افتراض التراجع : } 2^n \geq 1 + n \text{ إذن : } 2^n \times 2 \geq 2 \times (1 + n)$$

$$\text{يعني : } 2^{n+1} \geq 2n + 2 \text{ إذن لم نجد بعد النتيجة}$$

$$\text{نلاحظ أن : } 2n + 2 \geq n + 1 \text{ (يمكن حساب الفرق)}$$

$$(2n + 2) - (n + 1) = 2n + 2 - n - 1 = n + 1 \geq 0$$

$$\text{لدينا إذن : } 2^{n+1} \geq 2n + 2 \text{ و } 2n + 2 \geq n + 1 \text{ ومنه : } 2^{n+1} \geq n + 2$$

تمرين 39: بين باستعمال الاستدلال بالترجع أن : $\forall n \in \mathbb{N}; 2^n \geq 1 + n$

الجواب : نمر بثلاث مراحل :

المرحلة 1: نتحقق أن العبارة صحيحة بالنسبة ل $n = 0$

$$\text{لدينا } 2^0 \geq 1 + 0 \text{ أي : } 1 \geq 1 \text{ ومنه العبارة صحيحة بالنسبة ل } n = 0$$

المرحلة 2: نفترض أن : $2^n \geq 1 + n$ صحيحة

المرحلة 3: نبين أن : $2^{n+1} \geq 1 + (n+1)$ أي نبين أن : $2^{n+1} \geq n + 2$ ؟؟؟؟؟

$$\text{لدينا حسب افتراض التراجع : } 2^n \geq 1 + n \text{ إذن : } 2^n \times 2 \geq 2 \times (1 + n)$$

$$\text{يعني : } 2^{n+1} \geq 2n + 2 \text{ إذن لم نجد بعد النتيجة}$$

$$\text{نلاحظ أن : } 2n + 2 \geq n + 1 \text{ (يمكن حساب الفرق)}$$

$$(2n + 2) - (n + 1) = n + 1 \geq 0$$

$$\text{لدينا إذن : } 2^{n+1} \geq 2n + 2 \text{ و } 2n + 2 \geq n + 1 \text{ ومنه : } 2^{n+1} \geq n + 2$$

تمرين 40: بين باستعمال الاستدلال بالترجع أن :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* : 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n \times (n + 1)}{2}$$

الجواب : نمر بثلاث مراحل :

المرحلة 1: نتحقق أن العبارة صحيحة بالنسبة ل $n = 1$

$$\text{لدينا } 1 = \frac{1 \times (1 + 1)}{2} = \frac{1 \times 2}{2} = 1 \text{ ومنه العبارة صحيحة بالنسبة ل } n = 1$$

$$\text{المرحلة 2: نفترض أن : } 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n \times (n + 1)}{2} \text{ صحيحة}$$

$$\text{المرحلة 3: نبين أن : } 1 + 2 + 3 + \dots + n + (n + 1) = \frac{(n + 1) \times (n + 2)}{2} \text{ ؟؟}$$

$$\text{لدينا : } 1 + 2 + 3 + \dots + n + (n + 1) = (1 + 2 + 3 + \dots + n) + (n + 1)$$

$$= \frac{n \times (n + 1)}{2} + (n + 1) = \frac{n \times (n + 1) + 2 \times (n + 1)}{2}$$

$$\text{إذن : } 1 + 2 + 3 + \dots + n + (n + 1) = \frac{n \times (n + 1)}{2} + (n + 1) = (n + 1) \left(\frac{n}{2} + 1 \right)$$

$$= (n + 1) \left(\frac{n + 2}{2} \right) = \frac{(n + 1)(n + 2)}{2}$$

$$\text{لدينا إذن : } \forall n \in \mathbb{N}^* : 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n \times (n + 1)}{2}$$

تمرين 41: بين $n^3 + 2n$ يقبل القسمة على 3

مهما يكن العدد الصحيح الطبيعي n

$$\text{الجواب : يعني نبين : } \exists k \in \mathbb{N} / n^3 + 2n = 3k$$

نستعمل الاستدلال بالترجع ونمر بثلاث مراحل :

المرحلة 1: نتحقق أن العبارة صحيحة بالنسبة ل $n = 0$

$$\text{لدينا } 0^3 + 2 \times 0 = 0 \text{ مضاعف للعدد 3 ومنه العبارة}$$

$$\text{صحيحة بالنسبة ل } n = 0$$

المرحلة 2: نفترض أن : $\exists k \in \mathbb{N} / n^3 + 2n = 3k$ صحيحة

المرحلة 3: نبين أن : $\exists k' \in \mathbb{N} / (n + 1)^3 + 2(n + 1) = 3k'$ ؟؟؟؟؟

$$(n + 1)^3 + 2(n + 1) = n^3 + 3n^2 + 3n + 1 + 2n + 2 =$$

$$= (n^3 + 2n) + 3n^2 + 3n + 3 = 3k + 3(n^2 + n + 1) = 3(k + n^2 + n + 1)$$

$$= 3k' \text{ مع } k' = k + n^2 + n + 1$$

$$\text{ومنه : } \exists k' \in \mathbb{N} / (n + 1)^3 + 2(n + 1) = 3k'$$

$$\text{وبالتالي } n^3 + 2n \text{ يقبل القسمة على 3 مهما يكن العدد الصحيح الطبيعي } n$$

تمرين 42: بين باستعمال الاستدلال بالترجع أن :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* : 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

الجواب : نمر بثلاث مراحل :

المرحلة 1: نتحقق أن العبارة صحيحة بالنسبة ل $n = 1$

لدينا $1^2 = \frac{1 \times (1+1) \times (2 \times 1 + 1)}{6} = \frac{1 \times 2 \times 3}{6} = 1$ ومنه العبارة صحيحة بالنسبة ل $n = 1$

المرحلة 2: نفترض أن: $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ صحيحة

المرحلة 3: نبين أن: $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 + (n+1)^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$ ؟

لدينا : $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 + (n+1)^2 = (1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2) + (n+1)^2$

ولدينا حسب افتراض التراجع : $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

اذن : $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 + (n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2$

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 + (n+1)^2 = (n+1) \left(\frac{n(2n+1)}{6} + (n+1) \right)$$

$$= (n+1) \left(\frac{n(2n+1) + 6(n+1)}{6} \right) = (n+1) \left(\frac{2n^2 + 7n + 6}{6} \right)$$

ويمكننا أن نلاحظ أن : $2n^2 + 7n + 6 = (n+2)(2n+3)$

ومنه : $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 + (n+1)^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$

تمرين 43: بين باستعمال الاستدلال بالترجع أن :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* : 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2$$

الجواب : نمر بثلاث مراحل :

المرحلة 1: نتحقق أن العبارة صحيحة بالنسبة ل $n = 1$

لدينا $1^3 = \left(\frac{1(1+1)}{2} \right)^2 = 1$ ومنه العبارة صحيحة بالنسبة ل $n = 1$

المرحلة 2: نفترض أن: $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2$ صحيحة

المرحلة 3: نبين أن: $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 + (n+1)^3 = \left(\frac{(n+1)(n+2)}{2} \right)^2$ ؟؟

لدينا : $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 + (n+1)^3 = (1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3) + (n+1)^3$

ولدينا حسب افتراض التراجع : $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2$

اذن : $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 + (n+1)^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2 + (n+1)^3$

$$= \frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3 = (n+1)^2 \left(\frac{n^2}{4} + (n+1) \right) = (n+1)^2 \left(\frac{n^2 + 4n + 4}{4} \right)$$

$$= (n+1)^2 \frac{(n+2)^2}{4} = (n+1)^2 \frac{(n+2)^2}{2^2} = \left(\frac{(n+1)(n+2)}{2} \right)^2$$

ومنه : $\forall n \in \mathbb{N}^* : 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2$

تمرين 44: بين باستعمال الاستدلال بالترجع أن :

$$\forall n \in \mathbb{N} : 2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^n = 2^{n+1} - 1$$

الجواب : نمر بثلاث مراحل :

المرحلة 1: نتحقق أن العبارة صحيحة بالنسبة ل $n = 0$

لدينا $2^0 = 1$ و $2^{0+1} - 1 = 1$ ومنه العبارة صحيحة بالنسبة ل $n = 0$

المرحلة 2: نفترض أن: $2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^n = 2^{n+1} - 1$ صحيحة

المرحلة 3: نبين أن: $2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^n + 2^{n+1} = 2^{n+2} - 1$ ؟؟؟؟

لدينا : $2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^n + 2^{n+1} = (2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^n) + 2^{n+1}$

ولدينا حسب افتراض التراجع : $2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^n = 2^{n+1} - 1$

اذن : $2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^n + 2^{n+1} = 2^{n+1} - 1 + 2^{n+1} = 2 \times 2^{n+1} - 1 = 2^{n+2} - 1$

ومنه : $2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^n + 2^{n+1} = 2^{n+2} - 1$

والتالي : $\forall n \in \mathbb{N} : 2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^n = 2^{n+1} - 1$

تمرين 45: بين باستعمال الاستدلال بالترجع أن :

$$\forall n \in \mathbb{N} : 5^0 + 5^1 + 5^2 + \dots + 5^n = \frac{5^{n+1} - 1}{4}$$

الجواب : نمر بثلاث مراحل :

المرحلة 1: نتحقق أن العبارة صحيحة بالنسبة ل $n = 0$

لدينا $5^0 = 1$ و $\frac{5^{0+1} - 1}{4} = 1$ ومنه العبارة صحيحة بالنسبة ل $n = 0$

المرحلة 2: نفترض أن: $5^0 + 5^1 + 5^2 + \dots + 5^n = \frac{5^{n+1} - 1}{4}$ صحيحة

المرحلة 3: نبين أن: $5^0 + 5^1 + 5^2 + \dots + 5^n + 5^{n+1} = \frac{5^{n+2} - 1}{4}$ ؟؟؟؟؟

لدينا : $5^0 + 5^1 + 5^2 + 5^3 + \dots + 5^n + 5^{n+1} = (5^0 + 5^1 + 5^2 + 5^3 + \dots + 5^n) + 5^{n+1}$

ولدينا حسب افتراض التراجع : $5^0 + 5^1 + 5^2 + \dots + 5^n = \frac{5^{n+1} - 1}{4}$

اذن : $5^0 + 5^1 + 5^2 + \dots + 5^n + 5^{n+1} = \frac{5^{n+1} - 1}{4} + 5^{n+1}$

$$= \frac{5^{n+1} - 1 + 4 \times 5^{n+1}}{4} = \frac{5 \times 5^{n+1} - 1}{4} = \frac{5^{n+2} - 1}{4}$$

ومنه : $5^0 + 5^1 + 5^2 + \dots + 5^n + 5^{n+1} = \frac{5^{n+2} - 1}{4}$

والتالي : $\forall n \in \mathbb{N} : 5^0 + 5^1 + 5^2 + \dots + 5^n = \frac{5^{n+1} - 1}{4}$

تمرين 46 (1): بين أن: $\forall n \in \mathbb{N} : 3^0 + 3^1 + 3^2 + \dots + 3^n = \frac{3^{n+1} - 1}{2}$

(2) أ) بين أن : $12n + 14 \geq 6(n+1) + 7$ $\forall n \in \mathbb{N}$

ب) بين باستعمال الاستدلال بالترجع أن : $2^n \geq 6n + 7$ $\forall n \geq 6$

الجواب : (1) نمر بثلاث مراحل :

المرحلة 1: نتحقق أن العبارة صحيحة بالنسبة ل $n = 0$

لدينا $3^0 = 1$ و $\frac{3^{0+1} - 1}{2} = 1$ ومنه العبارة صحيحة بالنسبة ل $n = 0$

المرحلة 2: نفترض أن: $3^0 + 3^1 + 3^2 + \dots + 3^n = \frac{3^{n+1} - 1}{2}$ صحيحة

المرحلة 3: نبين أن: $3^0 + 3^1 + 3^2 + \dots + 3^n + 3^{n+1} = \frac{3^{n+2} - 1}{2}$ ؟؟

لدينا : $3^0 + 3^1 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^n + 3^{n+1} = (3^0 + 3^1 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^n) + 3^{n+1}$

ولدينا حسب افتراض التراجع : $3^0 + 3^1 + 3^2 + \dots + 3^n = \frac{3^{n+1} - 1}{2}$

اذن : $3^0 + 3^1 + 3^2 + \dots + 3^n + 3^{n+1} = \frac{3^{n+1} - 1}{2} + 3^{n+1}$

$$= \frac{3^{n+1} - 1 + 2 \times 3^{n+1}}{2} = \frac{3 \times 3^{n+1} - 1}{2} = \frac{3^{n+2} - 1}{2}$$

ومنه : $3^0 + 3^1 + 3^2 + \dots + 3^n + 3^{n+1} = \frac{3^{n+2} - 1}{2}$

والتالي : $\forall n \in \mathbb{N} : 3^0 + 3^1 + 3^2 + \dots + 3^n = \frac{3^{n+1} - 1}{2}$

(2) أ) نبين أن : $12n + 14 \geq 6(n+1) + 7$ $\forall n \in \mathbb{N}$ ؟؟؟؟؟

نحسب الفرق :

$$(12n + 14) - (6(n+1) + 7) = 2n + 14 - 6n - 6 - 7 = 6n + 1 \geq 0$$

ومنه : $12n + 14 \geq 6(n+1) + 7$ $\forall n \in \mathbb{N}$

(2) ب) نبين أن : $2^n \geq 6n + 7$ $\forall n \geq 6$ ؟؟؟؟؟

المرحلة 1: نتحقق أن العبارة صحيحة بالنسبة ل $n = 6$

لدينا $64 \geq 43$: لأن $2^6 \geq 6 \times 6 + 7$ ومنه العبارة صحيحة بالنسبة ل

$n = 6$

المرحلة 2: نفترض أن: $2^n \geq 6n + 7$ صحيحة

المرحلة 3: نبين أن: $2^{n+1} \geq 6(n+1) + 7$ ؟؟؟؟

لدينا حسب افتراض التراجع : $2^n \geq 6n + 7$ إذن : $2 \times 2^n \geq 2 \times (6n + 7)$

يعني : $2^{n+1} \geq 12n + 14$ إذن لم نجد بعد النتيجة

وحسب السؤال (2) لدينا : $12n + 14 \geq 6(n+1) + 7$ $\forall n \in \mathbb{N}$

لدينا إذن : $2^{n+1} \geq 12n + 14$ و $12n + 14 \geq 6(n+1) + 7$

ومنه : $2^{n+1} \geq 6(n+1) + 7$

وبالتالي : $\forall n \geq 6$ $2^n \geq 6n + 7$ ؟؟؟؟

تمرين 47: بين أنه مهما يكن n من $\mathbb{N}^*$.

$$1 \times 2 + 2 \times 3 + 3 \times 4 + 4 \times 5 + \dots + n \times (n+1) = \frac{1}{3} n \times (n+1) \times (n+2)$$

الجواب : نمر بثلاث مراحل :

المرحلة 1: نتحقق أن العبارة صحيحة بالنسبة ل $n = 1$

$$1 \times 2 + 2 \times 3 + 3 \times 4 + 4 \times 5 + \dots + n \times (n+1) = \frac{1}{3} n \times (n+1) \times (n+2)$$

صحيحة بالنسبة ل $n = 1$

المرحلة 2: نفترض أن: $1 \times 2 + 2 \times 3 + 3 \times 4 + 4 \times 5 + \dots + n \times (n+1) = \frac{1}{3} n \times (n+1) \times (n+2)$

المرحلة 3: نبين أن :

$$1 \times 2 + 2 \times 3 + 3 \times 4 + 4 \times 5 + \dots + n \times (n+1) + (n+1) \times (n+2) = \frac{1}{3} (n+1) \times (n+2) \times (n+3)$$

$$1 \times 2 + 2 \times 3 + 3 \times 4 + 4 \times 5 + \dots + n \times (n+1) = \frac{1}{3} n \times (n+1) \times (n+2)$$

$$1 \times 2 + 2 \times 3 + 3 \times 4 + 4 \times 5 + \dots + n \times (n+1) + (n+1) \times (n+2) = \frac{1}{3} n \times (n+1) \times (n+2) + (n+1) \times (n+2)$$

$$= \frac{1}{3} n \times (n+1) \times (n+2) + (n+1) \times (n+2) = (n+1) \times (n+2) \left(\frac{1}{3} n + 1 \right) = (n+1) \times (n+2) \left(\frac{n+3}{3} \right)$$

$$1 \times 2 + 2 \times 3 + 3 \times 4 + 4 \times 5 + \dots + n \times (n+1) + (n+1) \times (n+2) = \frac{1}{3} (n+1) \times (n+2) \times (n+3)$$

تمرين 48: بين أنه مهما يكن n من $\mathbb{N}^*$.

$$\frac{1}{1 \times 2 \times 3} + \frac{1}{2 \times 3 \times 4} + \frac{1}{3 \times 4 \times 5} + \dots + \frac{1}{n \times (n+1) \times (n+2)} = \frac{n \times (n+3)}{4(n+1) \times (n+2)}$$

الجواب : نمر بثلاث مراحل :

المرحلة 1: نتحقق أن العبارة صحيحة بالنسبة ل $n = 1$

$$1 \times 2 \times 3 = 6 \quad 1 \times (1+3) = 4 \quad 4 \times 2 \times 3 = 24$$

المرحلة 2: نفترض أن:

$$\frac{1}{1 \times 2 \times 3} + \frac{1}{2 \times 3 \times 4} + \frac{1}{3 \times 4 \times 5} + \dots + \frac{1}{n \times (n+1) \times (n+2)} = \frac{n \times (n+3)}{4(n+1) \times (n+2)}$$

المرحلة 3: نبين أن:

$$S = \frac{1}{1 \times 2 \times 3} + \frac{1}{2 \times 3 \times 4} + \frac{1}{3 \times 4 \times 5} + \dots + \frac{1}{n \times (n+1) \times (n+2)} + \frac{1}{(n+1) \times (n+2) \times (n+3)} = \frac{(n+1) \times (n+4)}{4(n+2) \times (n+3)}$$

لدينا حسب افتراض التراجع :

$$\frac{1}{1 \times 2 \times 3} + \frac{1}{2 \times 3 \times 4} + \frac{1}{3 \times 4 \times 5} + \dots + \frac{1}{n \times (n+1) \times (n+2)} = \frac{n \times (n+3)}{4(n+1) \times (n+2)}$$

إذن :

$$= \frac{n \times (n+3)}{4(n+1) \times (n+2)} + \frac{1}{(n+1) \times (n+2) \times (n+3)} = \frac{n \times (n+3)^2}{4(n+1) \times (n+2) \times (n+3)} + \frac{4}{4(n+1) \times (n+2) \times (n+3)}$$

$$= \frac{n \times (n+3)^2 + 4}{4(n+1) \times (n+2) \times (n+3)} = \frac{n \times (n^2 + 6n + 9) + 4}{4(n+1) \times (n+2) \times (n+3)} = \frac{n^3 + 6n^2 + 9n + 4}{4(n+1) \times (n+2) \times (n+3)}$$

يمكننا أن نبين أن : $n^3 + 6n^2 + 9n + 4 = (n+1)^2 \times (n+4)$

$$S = \frac{n^3 + 6n^2 + 9n + 4}{4(n+1) \times (n+2) \times (n+3)} = \frac{(n+1)^2 \times (n+4)}{4(n+1) \times (n+2) \times (n+3)} = \frac{(n+1) \times (n+4)}{4(n+2) \times (n+3)}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \frac{1}{1 \times 2 \times 3} + \frac{1}{2 \times 3 \times 4} + \frac{1}{3 \times 4 \times 5} + \dots + \frac{1}{n \times (n+1) \times (n+2)} = \frac{n \times (n+3)}{4(n+1) \times (n+2)}$$

تمرين 49: بين أنه مهما يكن n من $\mathbb{N}$.

$$b_n = 4^{2n+2} - 1$$

الجواب : يعني نبين : $\exists k \in \mathbb{N} / b_n = 15k$

نستعمل الاستدلال بالتراجع و نمر بثلاث مراحل :

المرحلة 1: نتحقق أن العبارة صحيحة بالنسبة ل $n = 0$

$$b_0 = 4^{2 \times 0 + 2} - 1 = 4^2 - 1 = 15$$

مضاعف للعدد 15 ومنه العبارة صحيحة بالنسبة ل $n = 0$

المرحلة 2: نفترض أن: $\exists k \in \mathbb{N} / 4^{2n+2} - 1 = 15k$

المرحلة 3: نبين أن: $\exists k' \in \mathbb{N} / 4^{2(n+1)+2} - 1 = 15k'$ ؟؟؟؟

$$\exists k' \in \mathbb{N} / 4^{2n+4} - 1 = 15k'$$

$$\exists k' \in \mathbb{N} / b_{n+1} = 15k'$$

$$b_{n+1} - b_n = (4^{2n+4} - 1) - (4^{2n+2} - 1)$$

$$b_{n+1} - b_n = 4^{2n+2} - 4^{2n+2} = 4^{2n+2} (4^2 - 1)$$

$$b_{n+1} - b_n = 15 \times 4^{2n+1}$$

$$b_{n+1} = 15 \times 4^{2n+1} + b_n \text{ يعني } b_{n+1} - b_n = 15 \times 4^{2n+1}$$

$$\exists k \in \mathbb{N} / b_n = 15k$$

$$b_{n+1} = 15 \times (4^{2n+1} + k) \text{ اي } b_{n+1} = 15 \times 4^{2n+1} + 15k$$

$$\exists k' \in \mathbb{N} / b_{n+1} = 15k'$$

تمرين 50: بين أنه مهما يكن n من $\mathbb{N}$.

$$n^3 - n$$

الجواب : يعني نبين : $\exists k \in \mathbb{N} / n^3 - n = 6k$

نستعمل الاستدلال بالتراجع و نمر بثلاث مراحل :

المرحلة 1: نتحقق أن العبارة صحيحة بالنسبة ل $n = 0$

$$0^3 - 0 = 0$$

لدينا $0^3 - 0 = 0$ ومنه العبارة صحيحة بالنسبة ل $n = 0$

المرحلة 2: نفترض أن: $\exists k \in \mathbb{N} / n^3 - n = 6k$ صحيحة

المرحلة 3: نبين أن: $\exists k' \in \mathbb{N} / (n+1)^3 - (n+1) = 6k'$ ؟؟؟؟

$$(n+1)^3 - (n+1) = n^3 + 3n^2 + 3n + 1 - n - 1 =$$

$$= (n^3 - n) + 3n^2 + 3n = 6k + 3(n^2 + n) = 6k + 3n(n+1)$$

$$n(n+1) = 2m \text{ ونعلم أن : } n(n+1) \text{ عدد زوجي لأنه جداء عددين متتاليين}$$

$$(n+1)^3 - (n+1) = 6k + 3 \times 2m = 6k + 6m = 6(k+m) = 6k'$$

$$\exists k' \in \mathbb{N} / (n+1)^3 - (n+1) = 6k'$$

وبالتالي:

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad 11^{n+1} - 1 = 10 \times 11^n + 11^n - 1$$

$$11^n - 1$$

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad 10$$

$$11^{n+1} - 1 = 11 \times 11^n - 1 = (10+1) \times 11^n - 1 = 10 \times 11^n + 11^n - 1$$

$$\exists k \in \mathbb{N} / 11^n - 1 = 10k$$

يعني نبين : $\exists k \in \mathbb{N} / 11^n - 1 = 10k$

نستعمل الاستدلال بالتراجع و نمر بثلاث مراحل :

المرحلة 1: نتحقق أن العبارة صحيحة بالنسبة ل $n = 0$

$$11^0 - 1 = 1 - 1 = 0$$

$$n=0$$

المرحلة 2: نفترض أن: $\exists k \in \mathbb{N} / 11^n - 1 = 10k$ صحيحة

المرحلة 3: نبين أن: $\exists k' \in \mathbb{N} / 11^{n+1} - 1 = 10k'$ ؟؟؟؟

نعلم حسب (1) $11^{n+1} - 1 = 10 \times 11^n + 11^n - 1$

ولدينا حسب افتراض التراجع : $\exists k \in \mathbb{N} / 11^n - 1 = 10k$

اذن: $11^{n+1} - 1 = 10 \times 11^n + 10k$

اذن: $k' = 11^n + k$ مع $11^{n+1} - 1 = 10(11^n + k) = 10k'$

ومنه : $11^{n+1} - 1$ مضاعف للعدد 10

وبالتالي: $11^n - 1$ مضاعف للعدد 10 $\forall n \in \mathbb{N}$

تمرين 52: نضع : $\forall n \in \mathbb{N}^* A_n = 3^{2n} - 2^n$

(1) تحقق من أن : $A_{n+1} = 2A_n + 7 \times 3^{2n}$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$

(2) بين باستعمال الاستدلال بالترجع أن : A_n مضاعف للعدد 7 $\forall n \in \mathbb{N}^*$

الجواب (1) $A_{n+1} = 3^{2(n+1)} - 2^{n+1} = 3^{2n+2} - 2^{n+1} = 3^{2n} \times 3^2 - 2^n \times 2^1$

$A_{n+1} = 9 \times 3^{2n} - 2^n \times 2^1 = (7+2) \times 3^{2n} - 2^n \times 2^1 = 7 \times 3^{2n} + 2 \times 3^{2n} - 2^n \times 2^1$

$A_{n+1} = 7 \times 3^{2n} + 2 \times 3^{2n} - 2^n \times 2^1 = 7 \times 3^{2n} + 2(3^{2n} - 2^n) = 7 \times 3^{2n} + 2 \times A_n$

(2) يعني نبين : $\exists k \in \mathbb{N}^* / A_n = 7k$

المرحلة 1: نتحقق أن العبارة صحيحة بالنسبة ل $n = 1$

لدينا $A_1 = 3^{2 \times 1} - 2^1 = 3^2 - 2 = 9 - 2 = 7$

مضاعف للعدد 7 ومنه العبارة صحيحة بالنسبة ل $n = 1$

المرحلة 2: نفترض أن: $\exists k \in \mathbb{N}^* / A_n = 7k$ صحيحة

المرحلة 3: نبين أن: $\exists k' \in \mathbb{N}^* / A_{n+1} = 7k'$ ؟؟؟؟

حسب السؤال (1) $A_{n+1} = 7 \times 3^{2n} + 2 \times A_n$

اذن : $A_{n+1} = 7 \times 3^{2n} + 2 \times A_n = 7 \times 3^{2n} + 2 \times 7k = 7 \times (3^{2n} + 2k) = 7 \times k'$

وبالتالي : $A_n = 3^{2n} - 2^n$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$

تمرين 53: ليكن a عدد حقيقي موجب قطعاً

(1) بين باستعمال الاستدلال بالترجع أن : $\forall n \in \mathbb{N}; (1+a)^n \geq 1+n \times a$

(2) استنتج أن : $2^n > n$ $\forall n \in \mathbb{N};$

الجواب (1): نمر بثلاث مراحل :

المرحلة 1: نتحقق أن العبارة صحيحة بالنسبة ل $n = 0$

لدينا $(1+a)^0 \geq 1+0 \times a$ لأن : $1 \geq 1$ ومنه العبارة صحيحة بالنسبة ل $n = 0$

المرحلة 2: نفترض أن: $(1+a)^n \geq 1+n \times a$ صحيحة

المرحلة 3: نبين أن: $(1+a)^{n+1} \geq 1+(n+1) \times a$ ؟؟؟؟

لدينا حسب افتراض التراجع : $(1+a)^n \geq 1+n \times a$

اذن : $(1+a)(1+a)^n \geq (1+a)(1+n \times a)$

يعني : $(1+a)^{n+1} \geq (1+a)(1+n \times a)$ اذن لم نجد بعد النتيجة

نقارن : $(1+a)(1+n \times a)$ و $1+(n+1) \times a$ (يمكن حساب الفرق)

$(1+a)(1+n \times a) - (1+(n+1) \times a) = 1 + na + a + na^2 - 1 - n \times a - a$

$(1+a)(1+n \times a) - (1+(n+1) \times a) = na^2 \geq 0$

اذن : $(1+a)(1+n \times a) \geq (1+(n+1) \times a)$

ومنه : $(1+a)^{n+1} \geq 1+(n+1) \times a$

وبالتالي : $\forall n \in \mathbb{N}; (1+a)^n \geq 1+n \times a$

(2) وجدنا : $\forall a > 0; \forall n \in \mathbb{N}; (1+a)^n \geq 1+n \times a$

نأخذ مثلاً : $a = 1$ فنجد : $\forall n \in \mathbb{N}; (1+1)^n \geq 1+n \times 1$

أي : $\forall n \in \mathbb{N}; 2^n \geq 1+n$

ولكن نعلم أن : $\forall n \in \mathbb{N}; 1+n > n$

اذن : $\forall n \in \mathbb{N}; 2^n > n$

« c'est en forgeant que l'on devient forgeron » dit un proverbe.
c'est en s'entraînant
régulièrement aux calculs et
exercices que l'on devient un
mathématicien

