

ملخص درس المنطق

p	$\bar{p}$
1	0
0	1

الجدول 1

p	q	$p \vee q$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

الجدول 2

p	q	$p \wedge q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

الجدول 3

p	q	$(p \Rightarrow q)$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

الجدول 4

p	q	$(p \Leftrightarrow q)$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

الجدول 5

(5) تكافؤ عبارتين: تكافؤ عبارتين p و q هو العبارة التي نرمز لها بالرمز : $(p \Leftrightarrow q)$ والتي تكون صحيحة فقط إذا كانت العبارتان p و q صحيحتين معا أو خاطئتين معا. وجدول حقيقة الاستلزام المنطقي هو: **الجدول 5**
العبارة : $(p \Leftrightarrow q)$ تقرأ : " p تكافئ q "

جدول 5 هو حقيقة التكافؤ المنطقي

خاصية : العبارتان $(p \Leftrightarrow q)$

و $[(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)]$ متكافئتان

الدالة العبارية: نسمي دالة عبارية كل نص رياضي يحتوي على متغير (أو عدة متغيرات) ينتمي إلى مجموعة معلومة E حيث تصبح عبارة كلما عوضنا المتغير بعنصر من E ونرمز عادة لدالة عبارية بالرمز $A(x)$ أو

$B(x)$ أو $A(x; y)$

العبارات المكتملة: انطلاقا من الدالة العبارية

$A(x)$ نكون العبارة " $\exists x \in E, A(x)$ "

ونقرأ : " $\exists x \in E, A(x)$ يوجد على الأقل x

من E يحقق الخاصية $A(x)$ " وتكون العبارة

" $\exists x \in E, A(x)$ " صحيحة إذا وجد على

الأقل x من E يحقق الخاصية $A(x)$

انطلاقا من الدالة العبارية $A(x)$ نكون العبارة "

" $\forall x \in E, A(x)$ " ونقرأ : " $\forall x \in E, A(x)$ مهما يكن x من

E لدينا $A(x)$ "

وتكون العبارة " $\forall x \in E, A(x)$ "

صحيحة إذا كانت جميع عناصر E تحقق

الخاصية $A(x)$.

خاصية : نفي العبارة " $\forall x \in E, A(x)$ " هو

العبارة " $\exists x \in E, \bar{A}(x)$ "

نفي العبارة " $\exists x \in E, A(x)$ " هو العبارة

" $\forall x \in E, \bar{A}(x)$ "

العبارات: نسمي عبارة كل نص رياضي يحمل معنى يكون إما صحيحا وإما خاطئا ونرمز عادة لعبارة بأحد الرموز p أو q أو r
غالبا ما نعبر عن حقيقة عبارة بجدول يسمى جدول حقيقة عبارة : الرمز 1 يعني أن العبارة p صحيحة والرمز 0 يعني أن العبارة p خاطئة

العمليات على العبارات:

(1) **نفي عبارة:** نرمز لنفي العبارة p بالرمز $\bar{p}$ وتكون صحيحة إذا كانت p خاطئة وتكون خاطئة إذا كانت p صحيحة

وجدول حقيقة عملية النفي هو : **الجدول 1**

(2) **عطف عبارتين:** عطف عبارتين p و q هو العبارة التي نرمز لها بالرمز : $(p \wedge q)$ والتي تكون صحيحة فقط إذا كانت العبارتان p و q صحيحتين معا

وجدول حقيقة العطف المنطقي هو : **الجدول 2**

(3) **فصل عبارتين:** فصل عبارتين p و q هو العبارة التي نرمز لها بالرمز : $(p \vee q)$ والتي تكون خاطئة فقط إذا كانت العبارتان p و q خاطئتين معا

وجدول حقيقة الفصل المنطقي هو : **الجدول 3**

(4) **استلزام عبارتين:** استلزام عبارتين p و q هو العبارة التي نرمز لها بالرمز : $(p \Rightarrow q)$ والتي تكون خاطئة فقط إذا كانت p صحيحة و q خاطئة

وجدول حقيقة الاستلزام المنطقي هو : **الجدول 4**

ملاحظات: العبارة : $(p \Rightarrow q)$ تقرأ : " p تستلزم q " أو " p إذا كانت q فان q "
العبارة : $(q \Rightarrow p)$ تسمى الاستلزام العكسي للاستلزام $(p \Rightarrow q)$

للبرهان أن العبارة : $(p \Rightarrow q)$ صحيحة نفترض أن العبارة p صحيحة و نبين أن العبارة q صحيحة

نتيجة: العبارتان $(p \Rightarrow q)$ و $\bar{p} \vee q$ متكافئتان

الاستدلالات الرياضية

(1) الاستدلال الاستنتاجي :

مثال : ليكن $x \in \mathbb{R}$ بين أن : $2 < x < 4 \Rightarrow \frac{1}{3} < \frac{1}{x-1} < 1$

الأجوبة : نفترض أن : $2 < x < 4$ و نبين أن : $\frac{1}{3} < \frac{1}{x-1} < 1$

لدينا : $2 < x < 4$ إذن : $2-1 < x-1 < 4-1$

إذن : $1 < x-1 < 3$ إذن : $\frac{1}{3} < \frac{1}{x-1} < 1$

ومنه : $2 < x < 4 \Rightarrow \frac{1}{3} < \frac{1}{x-1} < 1$

(2) الاستدلال بالمثال المضاد :

مثال : بين العبارة التالية خاطئة مع تعليل الجواب :

$x + \frac{1}{x} \geq 2$ ($\forall x \in \mathbb{R}^*$) الجواب : نعتبر : $x = -2$

لدينا : $-2 + \frac{1}{-2} = -\frac{5}{2} < 2$ إذن : p خاطئة

(3) الاستدلال بالاستلزام المضاد للعكس

لكي نبرهن أن الاستلزام $(p \Rightarrow q)$ صحيح يكفي أن نبرهن أن

الاستلزام المضاد للعكس $(\bar{q} \Rightarrow \bar{p})$ صحيح

المرحلة 2: نفترض أن: $3^n \geq 1 + 2n$ صحيحة

المرحلة 3: نبين أن:

$$3^{n+1} \geq 1 + 2(n+1)$$

لدينا حسب افتراض التراجع :

$$3^n \times 3 \geq 3 \times (1 + 2n)$$

يعني : $3^{n+1} \geq 6n + 3$ إذن لم نجد بعد النتيجة

نلاحظ أن : $6n + 3 \geq 2n + 1$ (يمكن حساب الفرق)

$$(6n + 3) - (2n + 1) = 6n + 3 - 2n - 1 = 4n + 2 \geq 0$$

لدينا إذن : $3^{n+1} \geq 6n + 3$ و $6n + 3 \geq 2n + 1$ ومنه : $3^{n+1} \geq 2n + 3$

مثال 2: بين بالتراجع أن : $\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$

الجواب : نمر بثلاث مراحل : **المرحلة 1:** نتحقق أن العبارة صحيحة

بالنسبة ل $n = 1$

لدينا $1 = \frac{1 \times (1+1)}{2} = \frac{1 \times 2}{2} = 1$ ومنه العبارة صحيحة بالنسبة ل $n = 1$

المرحلة 2: نفترض أن: $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ صحيحة

المرحلة 3: نبين أن: $1 + 2 + 3 + \dots + n + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$ ؟؟

لدينا : $1 + 2 + 3 + \dots + n + (n+1) = (1 + 2 + 3 + \dots + n) + (n+1)$

ولدينا حسب افتراض التراجع : $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

إذن : $1 + 2 + 3 + \dots + n + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = (n+1) \left(\frac{n}{2} + 1 \right)$

$$1 + 2 + 3 + \dots + n + (n+1) = (n+1) \left(\frac{n+2}{2} \right) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

لدينا إذن : $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$

مثال 3: 1) بين أن : $11^{n+1} - 1 = 10 \times 11^n + 11^n - 1$ $\forall n \in \mathbb{N}$

2) بين باستعمال الاستدلال بالتراجع أن : $11^n - 1$ مضاعف للعدد 10

الجواب (1) : $11^{n+1} - 1 = 11 \times 11^n - 1 = (10+1) \times 11^n - 1 = 10 \times 11^n + 11^n - 1$

(2) يعني نبين : $\exists k \in \mathbb{N} / 11^n - 1 = 10k$

نستعمل الاستدلال بالتراجع ونمر بثلاث مراحل :

المرحلة 1: نتحقق أن العبارة صحيحة بالنسبة ل $n = 0$

لدينا $11^0 - 1 = 1 - 1 = 0$ مضاعف للعدد 10

ومنه العبارة صحيحة بالنسبة ل $n = 0$

المرحلة 2: نفترض أن: $\exists k \in \mathbb{N} / 11^n - 1 = 10k$ صحيحة

المرحلة 3: نبين أن: $\exists k' \in \mathbb{N} / 11^{n+1} - 1 = 10k'$ ؟؟؟؟

نعلم حسب (1) $11^{n+1} - 1 = 10 \times 11^n + 11^n - 1$

ولدينا حسب افتراض التراجع : $\exists k \in \mathbb{N} / 11^n - 1 = 10k$

إذن : $11^{n+1} - 1 = 10 \times 11^n + 10k$

إذن: $k' = 11^n + k$ مع $11^{n+1} - 1 = 10(11^n + k) = 10k'$

ومنه : $11^{n+1} - 1$ مضاعف للعدد 10

وبالتالي: $11^n - 1$ مضاعف للعدد 10 $\forall n \in \mathbb{N}$

مثال: ليكن $x \in \mathbb{R}$ و $y \in \mathbb{R}$ بين أن: $x + y > 1 \Rightarrow y > \frac{1}{2} \wedge x > \frac{1}{2}$

الجواب : نستعمل الاستدلال بالاستلزام المضاد للعكس

إذن يكفي أن نبين أن : $x \leq \frac{1}{2} \vee y \leq \frac{1}{2} \Rightarrow x + y \leq 1$ ؟؟؟؟

لدينا : $x \leq \frac{1}{2} \vee y \leq \frac{1}{2} \Rightarrow x + y \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$ إذن $x + y \leq 1$

ومنه : $x + y > 1 \Rightarrow y > \frac{1}{2} \wedge x > \frac{1}{2}$ وبالتالي : $x \leq \frac{1}{2} \vee y \leq \frac{1}{2} \Rightarrow x + y \leq 1$

(4) الاستدلال بالتكافؤ:

يعتمد الاستدلال بالتكافؤ على القانون المنطقي التالي : إذا كان : $q \Leftrightarrow p$

$(p \Leftrightarrow r)$ و $(q \Leftrightarrow r)$ فإن : $(p \Leftrightarrow r)$

مثال: بين أن : $\forall (a; b) \in (\mathbb{R}^+)^2$ $a + b \geq 2\sqrt{ab}$

الجواب : نستعمل الاستدلال بالتكافؤ:

$$a + b \geq 2\sqrt{ab} \Leftrightarrow a + b - 2\sqrt{ab} \geq 0 \Leftrightarrow (\sqrt{a})^2 + (\sqrt{b})^2 - 2\sqrt{ab} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0$$

وهذا صحيح لأن المربع دائما موجب

وبالتالي : $\forall (a; b) \in (\mathbb{R}^+)^2$ $a + b \geq 2\sqrt{ab}$

(5) الاستدلال بفصل الحالات :

مثال: باستعمال الاستدلال بفصل الحالات : حل في $\mathbb{R}$ المعادلة :

$$(E) : |3x - 6| = 1$$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$3x-6$	$-$	0	$+$

الجواب : ندرس إشارة : $3x - 6$

الحالة 1: إذا كانت : $x \geq 2$ فإن : $3x - 6 \geq 0$ ومنه : $(E) : |3x - 6| = 1$

$$x = \frac{7}{3} \in S \Leftrightarrow 3x = 7 \Leftrightarrow 3x - 6 = 1 \Leftrightarrow$$

الحالة 2: إذا كانت : $x \leq 2$ فإن : $3x - 6 \leq 0$ ومنه : $(E) : |3x - 6| = 1$

$$x = \frac{5}{3} \in S \Leftrightarrow -3x = -5 \Leftrightarrow -3x + 6 = 1 \Leftrightarrow -(3x - 6) = 1 \Leftrightarrow$$

ومنه مجموعة الحلول هي : $S = \left\{ \frac{5}{3}; \frac{7}{3} \right\}$

(6) الاستدلال بالخلف :

لكي نبرهن أن عبارة صحيحة نفترض أن العبارة خاطئة ونحاول الحصول على تناقض مع المعطيات

مثال: بين باستعمال الاستدلال بالخلف أن : $\forall x \in \mathbb{R} / \frac{x^2-1}{x^2+1} \neq 1$

الجواب : نفترض أن : $\exists x \in \mathbb{R} / \frac{x^2-1}{x^2+1} = 1$

يعني $x^2 - 1 = x^2 + 1$ يعني $-1 = +1$ وهذا غير صحيح

ومنه ما افترضناه كان خاطئا أي : $\forall x \in \mathbb{R} / \frac{x^2-1}{x^2+1} \neq 1$

(7) الاستدلال بالتراجع

لتكن $p(n)$ عبارة مرتبطة بعدد صحيح طبيعي n

لكي نبرهن أن العبارة $p(n)$ صحيحة

نمر بثلاث مراحل :

• نتحقق أن العبارة صحيحة بالنسبة ل $n = 0$

• نفترض أن العبارة صحيحة بالنسبة ل n

• نبين أن العبارة صحيحة بالنسبة ل $n + 1$

مثال 1: بين باستعمال الاستدلال بالتراجع أن : $\forall n \in \mathbb{N}; 3^n \geq 1 + 2n$

الجواب : نمر بثلاث مراحل :

المرحلة 1: نتحقق أن العبارة صحيحة بالنسبة ل $n = 0$

لدينا $3^0 \geq 1 + 2 \times 0$ أي : $1 \geq 1$ ومنه العبارة صحيحة بالنسبة ل $n = 0$