

فرض محروس رقم 2

التمرين الأول

نعتبر المتتالية $(U_n)_n$ المعرفة بما يلي : $U_0 = \frac{5}{2}$ و $U_{n+1} = 5 - \frac{6}{U_n}$

(1) بين أن $2 < U_n < 3$ ($\forall n \in \mathbb{N}$)
 (2) بين المتتالية $(U_n)_n$ تزايدية (لاحظ أن $X^2 - 5X + 6 = (X-2)(X-3)$)

(3) نضع $V_n = \frac{U_n - 3}{U_n - 2}$ لكل عدد طبيعي n

أ- بين أن $(V_n)_n$ هندسية أساسها $q = \frac{2}{3}$ و أحسب الحد العام V_n بدلالة n

ب- استنتج أن $U_n = \frac{3^{n+1} + 2^{n+1}}{3^n + 2^n}$

ج- أحسب بدلالة n الجمع $S = V_0 + V_1 + \dots + V_{n-1}$

التمرين الثاني

$(U_n)_n$ متتالية عددية بحيث : $U_0 = 2$ و $U_{n+1} = \frac{3U_n - 2}{2U_n - 1}$ ثم نضع $W_n = \frac{1}{U_n - 1}$

(1) أ- أحسب الحدود U_1 ; W_0 و W_1

ب- بين أن $U_n > 1$ ($\forall n \in \mathbb{N}$)

(2) بين أن $U_{n+1} - U_n = \frac{-2(U_n - 1)^2}{2U_n - 1}$ و استنتج رتبة المتتالية $(U_n)_n$

(3) أ- بين أن المتتالية $(W_n)_n$ حسابية و أحسب W_n بدلالة n

ب- استنتج أن $U_n = \frac{2n+2}{2n+1}$

ج- أحسب بدلالة n الجمع $T = W_0 + W_1 + \dots + W_n$

التمرين الثالث

$(u_n)_n$ متتالية بحيث : $u_0 = 2$ و $u_{n+1} = 2u_n - n + 1$ و نضع $v_n = u_n - n$

(1) أحسب الحدود u_1 ; u_2 ; v_0 و v_1

(2) بين بالترجع أن $u_n > n$ ($\forall n \in \mathbb{N}$)

(3) بين أن $(v_n)_n$ متتالية هندسية أساسها $q = 2$

(4) نضع $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$ بين أن $S_n = 2^{n+2} + \frac{n^2 + n - 8}{2}$

(نعطي $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$)

تمرين إضافي

لنكن $(a_n)_n$ متتالية غير منعدمة حسابية أساسها $r \neq 0$

بين أن $\frac{1}{a_0 a_1} + \frac{1}{a_1 a_2} + \dots + \frac{1}{a_{n-1} a_n} = \frac{n}{a_0 a_n}$