

الأستاذ:
نجيب
عثماني

الدرس الثامن:

دراسة الدوال وتمثيلها

أكاديمية
الجهة
الشرقية

مستوى: السنة الأولى من سلك البكالوريا

- شعبة التعليم الأصيل: مسلك العلوم الشرعية و مسلك اللغة العربية
 - شعبة الآداب و العلوم الإنسانية: مسلك الآداب و مسلك العلوم الإنسانية
- محتوى الدرس و الأهداف القدرات المنتظرة من الدرس و التعليمات الرسمية**

محتوى البرنامج	القدرات المنتظرة	توجيهات تربوية
- المقارب الأفقي؛ المقارب العمودي؛ - أمثلة لدراسة وتمثيل الدوال: $x \rightarrow ax^2 + bx + c$ و $x \rightarrow \frac{ax+b}{cx+d}$ و $x \rightarrow ax^3 + bx^2 + cx + d$	- استعمال عناصر تماثل منحنى في اختصار مجموعة دراسة دالة؛ - تمثيل دوال حدودية من الدرجة الثانية ومن الدرجة الثالثة ودوال متخاطة؛ - استعمال التمثيل المبياني لدالة أو جدول تغييراتها لدراسة حلول بعض المعادلات والمترجمات.	- يتم قبول الفروع اللانهائية لمنحنى دالة حدودية من الدرجة الثالثة؛ - ينبغي تناول الحل المبياني لمعادلات و مترجمات من النوع $f(x) \leq c$ و $f(x) = c$ حيث f دالة من بين الدوال الواردة في البرنامج إذا لم يكن الحل الجبري في المتناول.

التأويل المبياني: المستقيم ذا المعادلة $x = 2$ مقارب للمنحنى (C_f)

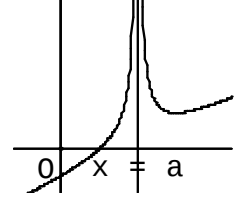
تمرين 1: أحسب النهايات التالية و أول مبيانيا النتائج :

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{x-1} \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{x-1}$$

2. المفاراب الموازي لمحور الأفاصيل
تعريف

إذا كانت: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = a$ أو $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = a$,

نقول إن المستقيم ذا المعادلة $y = a$ مقارب للمنحنى (C_f) بجوار $+\infty$ (أو بجوار $-\infty$)



مثال: نعتبر الدالة العددية f

$$f(x) = \frac{6x+1}{2x-5}$$

للمتغير الحقيقي x المعرفة كالتالي : حدد $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ وأول النتيجة هندسيا

$$\text{الجواب: } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{6x}{2x} = \frac{6}{2} = 3 \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6x}{2x} = \frac{6}{2} = 3$$

التأويل المبياني: المستقيم ذا المعادلة $y = 3$ مقارب للمنحنى (C_f)

تمرين 2: أحسب النهاية التالية و أول مبيانيا النتيجة :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x+2}$$

تمرين 3: أحسب النهايات التالية و أول مبيانيا النتائج :

$$(1) \quad \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x+3}{x-2} \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x+3}{x-2}$$

1. المستقيمت المقاربة

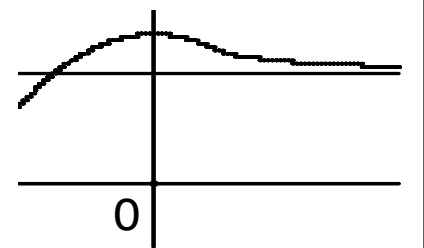
في جميع فقرات الدرس , ننسب المستوى إلى معلم متعامد $(O; \vec{i}; \vec{j})$

1. المفاراب الموازي لمحور الأراتيب
تعريف

إذا كانت: $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty$ أو $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty$

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty \quad \text{أو} \quad \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty$$

نقول إن المستقيم ذا المعادلة $x = a$ مقارب للمنحنى (C_f)



مثال: نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة كالتالي :

$$f(x) = \frac{2x-1}{3x-6}$$

حدد $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$ وأول النتيجة هندسيا

$$\text{الجواب: } \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{2x-1}{3x-6}$$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$3x-6$	$-$	0	$+$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} 3x-6 = 0^- \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} 3x-6 = 0^+ \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} 2x-1 = 3$$

ومنه : $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -\infty$ و $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = +\infty$

(7) أرسم المنحنى الممثل للدالة f

تمرين 6: لتكن f دالة معرفة ب: $f(x) = 2x^2 - 2x - 3$

- (1) حدد مجموعة تعريف الدالة f
- (2) أحسب النهايات التالية: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$
- (3) أحسب مشتقة الدالة f وأدرس إشارتها
- (4) حدد جدول تغيرات الدالة f .
- (5) حدد نقط تقاطع المنحنى الممثل للدالة f مع محور الأفاصيل.
- (6) حدد نقط تقاطع المنحنى الممثل للدالة f مع محور الأرتيب.
- (7) أرسم المنحنى الممثل للدالة f

III. دراسة دالة متخاطة:

مثال: نعتبر الدالة العددية g المعرفة ب: $g(x) = \frac{2x+1}{x+1}$

- (1) حدد حيز تعريف الدالة g .
- (2) أحسب نهايات الدالة g في محداث حيز التعريف و أول النتائج هندسيا.
- (3) أحسب الدالة المشتقة. ثم ضع جدول تغيرات الدالة g .
- (4) أنشئ منحنى الدالة g .

الحل:

(1) حيز تعريف الدالة g هو: $D = \{x \in \mathbb{R} / x+1 \neq 0\} = \mathbb{R} - \{-1\}$ و منه $D =]-\infty, -1[\cup]-1, +\infty[$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x+1}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{x} = 2 \text{ و } \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x+1}{x+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{x} = 2$$

يعني المستقيم ذا المعادلة $y = 2$ مقارب أفقي للمنحنى (C_f) .

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{2x+1}{x+1} = +\infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow -1^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{2x+1}{x+1} = -\infty$$

يعني المستقيم ذا المعادلة $x = -1$ مقارب عمودي للمنحنى.

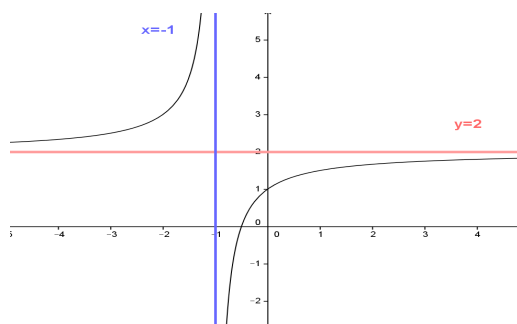
$$g'(x) = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}{(x+1)^2} = \frac{1}{(x+1)^2}$$

يعني: $(\forall x \in D) g'(x) > 0$

(4) جدول تغيرات الدالة:

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f'(x)$	$+$		$+$
$f(x)$	2		2

منحنى الدالة g .



$$\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{5}{2x-6} \text{ و } \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{5}{2x-6} \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x+5}{x+2} \text{ و } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x+5}{x+2} \quad (3)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x-1}{6x+2} \text{ و } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x-1}{6x+2} \quad (4)$$

II. دراسة دالة حدودية من الدرجة الثانية

مثال:

لتكن f دالة معرفة ب: $f(x) = x^2 + 4x + 3$

- (1) حدد مجموعة تعريف الدالة f
- (2) أحسب النهايات التالية: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$
- (3) أحسب مشتقة الدالة f وأدرس إشارتها
- (4) حدد جدول تغيرات الدالة f .
- (5) حدد نقط تقاطع المنحنى الممثل للدالة f مع محور الأفاصيل.
- (6) حدد نقط تقاطع المنحنى الممثل للدالة f مع محور الأرتيب.
- (7) أرسم المنحنى الممثل للدالة f و المستقيم (D) الذي معادلته $y = 3$ في معلم متعامد ممنظم $(o; \vec{i}; \vec{j})$.

(8) حدد نقط تقاطع (C_f) و (D) .

(9) حل مبيانيا في $\mathbb{R}$ المتراجحة $x^2 + 4x \geq 0$.

تمرين 4: لتكن f دالة معرفة ب: $f(x) = -x^2 + 2x + 3$

- (1) حدد مجموعة تعريف الدالة f
- (2) أحسب النهايات التالية: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$
- (3) أحسب مشتقة الدالة f وأدرس إشارتها
- (4) حدد جدول تغيرات الدالة f .
- (5) حدد نقط تقاطع المنحنى الممثل للدالة f مع محور الأفاصيل.
- (6) حدد نقط تقاطع المنحنى الممثل للدالة f مع محور الأرتيب.
- (7) أرسم المنحنى الممثل للدالة f

تمرين 5: لتكن f دالة معرفة ب:

$$f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2x + 1$$

- (1) حدد مجموعة تعريف الدالة f
- (2) أحسب النهايات التالية: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$
- (3) أحسب مشتقة الدالة f وأدرس إشارتها
- (4) حدد جدول تغيرات الدالة f .
- (5) حدد نقط تقاطع المنحنى الممثل للدالة f مع محور الأفاصيل.
- (6) حدد نقط تقاطع المنحنى الممثل للدالة f مع محور الأرتيب.

$$f(-x) = \frac{1}{3}(-x)^3 - 4(-x) = -\frac{1}{3}x^3 + 4x = -\left(\frac{1}{3}x^3 - 4x\right) = -f(x) \quad (\text{ب})$$

ومنه f دالة فردية

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty \quad (3)$$

لأن نهاية دالة حدودية عند ما لانهاية هي نهاية حدها الأكبر درجة

$$f'(x) = \left(\frac{1}{3}x^3 - 4x\right)' = \frac{1}{3}3x^2 - 4 = x^2 - 4 \quad (4)$$

$$(x-2)(x+2) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow f'(x) = 0$$

$$x = -2 \text{ أو } x = 2 \Leftrightarrow$$

x	$-\infty$	-2	2	$+\infty$
x^2-4	$+$	0	$-$	$+$

(5)

x	$-\infty$	-2	2	$+\infty$
$f(x)$	$+$	0	$-$	$+$
$f(x)$	$-\infty$	$16/3$	$-16/3$	$+\infty$

(6) معادلة لمماس ل (C_f) في النقطة A التي أفصولها $x_0 = -1$

$$f'(-1) = -3 \quad \text{و} \quad f(-1) = \frac{11}{3} \quad \text{و} \quad y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

$$y = -3x + \frac{2}{3} \Leftrightarrow y = \frac{11}{3} - 3(x+1) \Leftrightarrow y = f(-1) + f'(-1)(x+1)$$

(7) (أ) نقط تقاطع (C_f) المنحنى الممثل للدالة f مع محور الأفاسيل

$$\text{نحل فقط المعادلة : } f(x) = 0 \text{ يعني } \frac{1}{3}x^3 - 4x = 0$$

$$\text{يعني } x\left(\frac{1}{3}x^2 - 4\right) = 0 \text{ يعني } x = 0 \text{ أو } \frac{1}{3}x^2 - 4 = 0$$

$$\text{يعني } x = 0 \text{ أو } x^2 = 12 \text{ يعني } x = 0 \text{ أو } x = \sqrt{12} \text{ أو } x = -\sqrt{12}$$

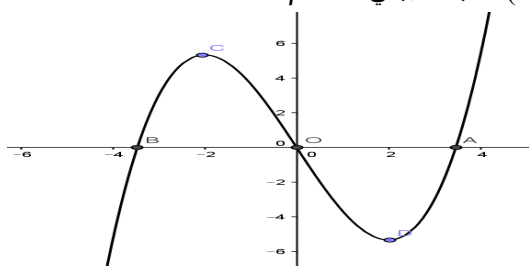
$$\text{يعني } x = 0 \text{ أو } x = 2\sqrt{3} \text{ أو } x = -2\sqrt{3}$$

ومنه نقط التقاطع هم $A(2\sqrt{3}; 0)$ و $B(-2\sqrt{3}; 0)$ و $O(0; 0)$

(ب) نقط تقاطع (C_f) المنحنى الممثل للدالة f مع محور الأرتيب

نحسب فقط : $f(0) = 0$ لدينا $f(0) = 0$ ومنه نقطة التقاطع هي : $O(0; 0)$

(8) التمثيل البياني للدالة f



تمرين 9: نعتبر الدالة f المعرفة كالتالي :

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$$

ليكن (C_f) الممثل للدالة f في معلم متعامد ممنظم $(O, \vec{i}, \vec{j})$

1. أحسب نهايات الدالة f عند محداث مجموعة التعريف

2. أحسب مشتقة الدالة f و أدرس إشارتها

3. ضع جدول تغيرات الدالة f .

4. حدد معادلة للمماس (T) للمنحنى (C_f) في النقطة $A(1; 2)$

تمرين 7: لتكن f دالة معرفة ب: $f(x) = \frac{2x+3}{x+2}$.

1. حدد مجموعة تعريف الدالة f

2. أحسب النهايات التالية : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

و $\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x)$

3. أحسب مشتقة الدالة f و أدرس إشارتها

4. حدد جدول تغيرات الدالة f .

5. حدد نقط تقاطع (C_f) المنحنى الممثل للدالة f مع محور

الأفاسيل.

6. حدد نقط تقاطع (C_f) المنحنى الممثل للدالة f مع محور

الأرتيب.

7. أرسم (C_f) المنحنى الممثل للدالة f

تمرين 8: لتكن f دالة معرفة ب: $f(x) = \frac{2x+1}{x-1}$.

1. حدد مجموعة تعريف الدالة f

2. أحسب النهايات التالية : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

و $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2x+1}{x-1}$ و $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2x+1}{x-1}$

3. أحسب مشتقة الدالة f و أدرس إشارتها

4. حدد جدول تغيرات الدالة f .

5. حدد نقط تقاطع (C_f) المنحنى الممثل للدالة f مع محور

الأفاسيل.

6. حدد نقط تقاطع (C_f) المنحنى الممثل للدالة f مع محور

الأرتيب.

7. أرسم (C_f) المنحنى الممثل للدالة f

IV. دراسة دالة حدودية من الدرجة الثالثة

مثال :

نعتبر الدالة f المعرفة كالتالي : $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 4x$

1. حدد D_f حيز تعريف الدالة f

2. أدرس زوجية الدالة f

3. أحسب نهايات الدالة f عند محداث D_f

4. أحسب مشتقة الدالة f و أدرس إشارتها

5. حدد جدول تغيرات الدالة f

6. حدد معادلة لمماس المنحنى (C_f) الممثل للدالة f في

النقطة A التي أفصولها $x_0 = -1$

7. حدد نقط تقاطع المنحنى (C_f) الممثل للدالة مع محوري

المعلم.

8. أرسم المنحنى (C_f) الممثل للدالة f في معلم متعامد ممنظم

أجوبة : $D_f = \mathbb{R}$ $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 4x$ لأنها دالة حدودية

(2) إذا كانت $x \in \mathbb{R}$ فإن $-x \in \mathbb{R}$

لأن نهاية دالة حدودية عند $+\infty$ و $-\infty$ هي نهاية حدها الأكبر درجة

$$f'(x) = (x^3 - 3x^2 + 4)' = 3x^2 - 6x = 3x(x-2) \quad (3)$$

$$x-2=0 \vee 3x=0 \Leftrightarrow 3x(x-2)=0 \Leftrightarrow f'(x)=0$$

$$x=2 \vee x=0 \Leftrightarrow$$

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$
$3x(x-2)$	+	0	-	+

(4)

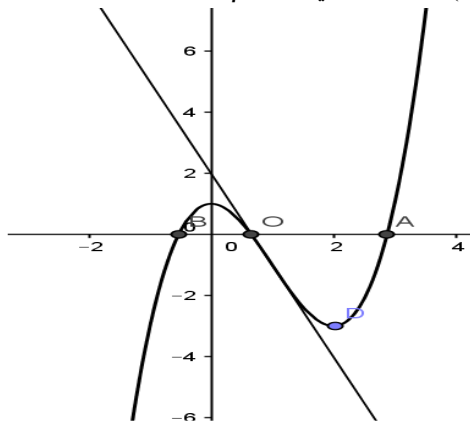
x	$-\infty$	0	2	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	+
$f(x)$	$-\infty$	1	-3	$+\infty$

(5) معادلة لمماس ل (C_f) في النقطة A التي أفصولها $x_0 = 1$

$$f'(1) = -3 \text{ و } f(1) = -1 \text{ و } y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

$$y = -3x + 2 \Leftrightarrow y = -1 - 3(x-1) \Leftrightarrow y = f(1) + f'(1)(x-1)$$

(6) التمثيل المبياني للدالة f



5. أحسب $f(-1)$ و $f(2)$ أنشئ (C_f) و (T) .

الأجوبة : $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$

$D_f = \mathbb{R}$ لأنها دالة حدودية

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty$$

لأن نهاية دالة حدودية عند $+\infty$ و $-\infty$ هي نهاية حدها الأكبر درجة

$$f'(x) = (x^3 - 3x^2 + 4)' = 3x^2 - 6x = 3x(x-2) \quad (2)$$

$$x-2=0 \vee 3x=0 \Leftrightarrow 3x(x-2)=0 \Leftrightarrow f'(x)=0$$

$$x=2 \vee x=0 \Leftrightarrow$$

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$
$3x(x-2)$	+	0	-	+

(3)

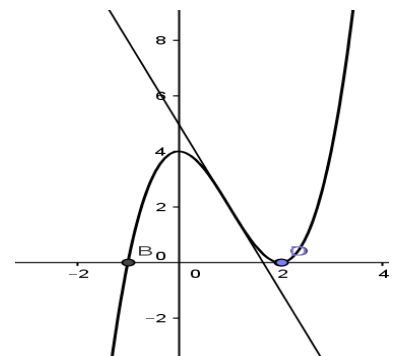
x	$-\infty$	0	2	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	+
$f(x)$	$-\infty$	4	0	$+\infty$

(4) معادلة لمماس ل (C_f) في النقطة A التي أفصولها $x_0 = 1$

$$f'(1) = -3 \text{ و } f(1) = 2 \text{ و } y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

$$y = -3x + 5 \Leftrightarrow y = 2 - 3(x-1) \Leftrightarrow y = f(1) + f'(1)(x-1)$$

(5) التمثيل المبياني للدالة f و $f(2) = 0$ و $f(-1) = 0$



تمرين 10:

نعتبر الدالة f المعرفة كالتالي : $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$

(1) حدد D_f حيز تعريف الدالة f

(2) أحسب نهايات الدالة f عند محددات D_f

(3) أحسب مشتقة الدالة f و أدرس إشارتها

(4) حدد جدول تغيرات الدالة f

(5) حدد معادلة لمماس المنحني (C_f) الممثل للدالة f في

النقطة A التي أفصولها $x_0 = -1$

(6) أرسم المنحني (C_f) الممثل للدالة f في معلم متعامد

منظم

الأجوبة : $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$

$D_f = \mathbb{R}$ لأنها دالة حدودية

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty \quad (2)$$