

الأستاذ:
نجيب
عثماني

الدرس السابع :
الاشتقاق

أكاديمية
الجهة
الشرقية

مستوى: السنة الأولى من سلك البكالوريا

- شعبة التعليم الأصيل: مسلك العلوم الشرعية و مسلك اللغة العربية
 - شعبة الآداب و العلوم الإنسانية: مسلك الآداب و مسلك العلوم الإنسانية
- محتوى الدرس و الأهداف القدرات المنتظرة من الدرس و التعليمات الرسمية

توجيهات تربوية	القدرات المنتظرة	محتوى البرنامج
تقبل المبرهنتان المتعلقةتان بالرتابة وإشارة المشتقة والعمليات على الدوال المشتقة.	- التعرف على أن العدد المشتق لدالة في x_0 هو المعامل الموجه لمماس لمنحنى الدالة في النقطة التي أفصولها x_0؛ - اشتقاق الدوال الحدودية والدوال الجذرية. - تحديد معادلة المماس لمنحنى دالة في نقطة وإنشاؤه؛ - تحديد رتابة دالة انطلاقا من دراسة إشارة مشتقتها؛ - حل مسائل تطبيقية حول القيم الدنوية والقيم القصوية؛ - تحديد إشارة دالة انطلاقا من جدول تغيراتها أو من تمثيلها المبياني؛	- العدد المشتق لدالة في نقطة x_0؛ التأويل الهندسي للعدد المشتق؛ المستقيم المماس لمنحنى في نقطة؛ - المعادلة الديكارتية للمستقيم المماس؛ - الاشتقاق على مجال؛ الدالة المشتقة؛ - اشتقاق الدوال: $x \rightarrow x^n$ و $x \rightarrow ax$ و $x \rightarrow a$؛ - اشتقاق الدوال $\frac{f}{g}$، $\frac{1}{f}$، fg، λf، $f+g$؛ $(n \in \mathbb{N}^*)$: f^n - رتابة دالة وإشارة مشتقتها؛ مطايف دالة قابلة للاشتقاق على مجال.

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{5(x^2 - 1^2)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{5(x-1)(x+1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} 5(x+1) = 5 \times 2 = 10$$

ومنه f قابلة للاشتقاق عند $x_0 = 1$

$$x_0 = 1 \text{ وهو العدد المشتق عند } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = 10 = f'(1)$$

تمرين: نعتبر الدالة f المعرفة كالتالي: $f(x) = 2x^2$

باستعمال التعريف أدرس اشتقاق الدالة f عند $x_0 = 3$

2. التأويل الهندسي للعدد المشتق - معادلة مماس لمنحنى دالة في نقطة

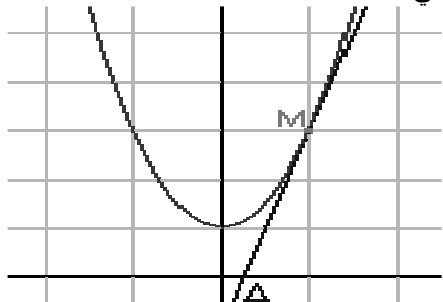
تعريف: لتكن f دالة قابلة للاشتقاق في نقطة a و (C_f)

منحناها في معلم متعامد ممنظم $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

المستقيم (Δ) المار من النقطة $M(a; f(a))$

و الذي معامل الموجه هو $f'(a)$ يسمى المماس للمنحنى (C_f)

في النقطة M



1. قابلية اشتقاق دالة عددية في نقطة

1. العدد المشتق

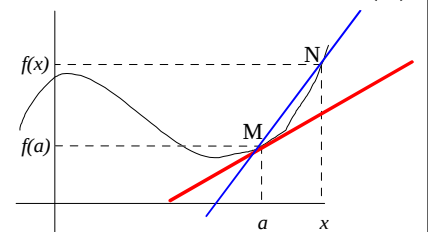
تعريف: لتكن f دالة عددية معرفة على مجال مفتوح I و a عنصرا من I

نقول إن الدالة f قابلة للاشتقاق في النقطة a إذا وجد عدد حقيقي l

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = l$$

بحيث l يسمى العدد المشتق للدالة في النقطة a و نرمز له بالرمز:

$f'(a)$



$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a)$$

ونكتب:

مثال: نعتبر الدالة f المعرفة كالتالي: $f(x) = 5x^2$

باستعمال التعريف أدرس اشتقاق الدالة f عند $x_0 = 1$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{5x^2 - 5}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{5(x^2 - 1)}{x - 1}$$

الدالة f	الدالة المشتقة f'
$f(x) = k$	$f'(x) = 0$
$f(x) = x$	$f'(x) = 1$
$f(x) = ax$	$f'(x) = a$
$f(x) = ax + b$	$f'(x) = a$
$f(x) = x^n$	$f'(x) = nx^{n-1}$ $n \in \mathbb{Z}^*$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$
$f(x) = \sqrt{x}$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
$f(x) = u + v$	$f'(x) = u' + v'$
$f(x) = u - v$	$f'(x) = u' - v'$
$f(x) = k.u$	$f'(x) = k.u'$
$f(x) = u \times v$	$f'(x) = u' \times v + u \times v'$
$f(x) = u^n$	$f'(x) = nu^n \times u'$
$f(x) = \frac{1}{u}$	$f'(x) = -\frac{u'}{u^2}$
$f(x) = \frac{u}{v}$	$f'(x) = \frac{u' \times v - u \times v'}{v^2}$

تمرين: حدد الدالة المشتقة للدالة f في كل حالة من الحالات التالية :

$$\begin{aligned} (1) f(x) &= 2 \quad (2) f(x) = 3x - 5 \quad (3) f(x) = x^{10} \\ (4) f(x) &= -\frac{1}{2}x^2 - 1 \quad (5) f(x) = \frac{5}{x} \quad (6) f(x) = 6\sqrt{x} - 4 \\ (7) f(x) &= \frac{1}{2x+1} \quad (8) f(x) = \frac{3x-1}{x+2} \quad (9) f(x) = (3x+4)^3 \\ (10) f(x) &= \sqrt{x^2+1} \end{aligned}$$

أجوبة: (1) $f'(x) = 0$ (2) $f'(x) = 3$ (3) $f'(x) = 10x^9$

(4) $f'(x) = -x$ (5) $f'(x) = -\frac{5}{x^2}$ (6) $f'(x) = \frac{3}{\sqrt{x}}$

(7) $f'(x) = -\frac{1}{(2x+1)^2}$ (8) $f'(x) = \frac{3(x+2) - (3x-1)(x+2)}{(x+2)^2} = \frac{7}{(x+2)^2}$

(9) $f'(x) = \frac{3x^2 + \frac{1}{2}x^2 + 1}{2}$ (10) $f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

(11) $f'(x) = \frac{3\sqrt{x}}{x}$ (12) $f'(x) = \frac{3}{\sqrt{x}}$ (13) $f'(x) = \frac{3}{\sqrt{x}}$

(14) $f'(x) = \frac{3}{\sqrt{x}}$ (15) $f'(x) = \frac{3}{\sqrt{x}}$ (16) $f'(x) = \frac{3}{\sqrt{x}}$

(17) $f'(x) = \frac{3}{\sqrt{x}}$ (18) $f'(x) = \frac{3}{\sqrt{x}}$ (19) $f'(x) = \frac{3}{\sqrt{x}}$

(20) $f'(x) = \frac{3}{\sqrt{x}}$ (21) $f'(x) = \frac{3}{\sqrt{x}}$ (22) $f'(x) = \frac{3}{\sqrt{x}}$

(23) $f'(x) = \frac{3}{\sqrt{x}}$ (24) $f'(x) = \frac{3}{\sqrt{x}}$ (25) $f'(x) = \frac{3}{\sqrt{x}}$

(26) $f'(x) = \frac{3}{\sqrt{x}}$ (27) $f'(x) = \frac{3}{\sqrt{x}}$ (28) $f'(x) = \frac{3}{\sqrt{x}}$

خاصية : لتكن f دالة قابلة للاشتقاق في نقطة a . معادلة المماس (Δ) للمنحنى (C_f) في النقطة $M(a; f(a))$ هي :
 $(\Delta) : y = f(a) + f'(a)(x - a)$

مثال: نعتبر الدالة f المعرفة كالتالي : $f(x) = 3x^2$

حدد معادلة المماس للمنحنى الممثل للدالة f عند $x_0 = 2$.

تمرين 1: نعتبر الدالة f المعرفة كالتالي : $f(x) = x^2 - 2x + 1$

1. باستعمال التعريف بين أن الدالة f قابلة للاشتقاق عند $x_0 = 2$.

2. حدد معادلة المماس للمنحنى الممثل للدالة f عند $x_0 = 2$.

الجواب (1): $f(2) = 2^2 - 2 \times 2 + 1 = 1$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 2x + 1 - 1}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 2x}{x - 2}$$

$$x_0 = 1 : \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x(x-2)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} x = 2$$

$2 = f'(2)$ وهو العدد المشتق عند $x_0 = 2$

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \quad (2)$$

$$y = 2x - 3 \Leftrightarrow y = 1 + 2(x - 2) \Leftrightarrow y = f(2) + f'(2)(x - 2)$$

II الدالة المشتقة لدالة عددية

1. الاشتقاق على مجال

تعريف 1: لتكن f دالة عددية معرفة على مجال مفتوح I

نقول إن الدالة f قابلة للاشتقاق على المجال I إذا كانت f قابلة

للاشتقاق في كل نقطة من I

2. الدالة المشتقة

لتكن f دالة عددية معرفة على مجال I

الدالة المشتقة للدالة f هي الدالة التي نرمز لها بالرمز $f'(x)$

$$f' : I \rightarrow \mathbb{R}$$

المعرفة كما يلي : $x \rightarrow f'(x)$

III جدول للدوال المشتقة لدوال اعتيادية و العمليات

حول الدوال المشتقة

مثال 1: $f(x) = 2$ **مثال 2:** $f(x) = 3x - 5$

مثال 3: $f(x) = x^{10}$ **مثال 4:** $f(x) = 2x^5$

مثال 5: $f(x) = 3x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 1$

مثال 6: $f(x) = 3x^2 - 6x - 1$

مثال 7: $f(x) = x^2 \times \sqrt{x}$

مثال 8: $f(x) = (3x - 5) \times (2x + 1)$

مثال 9: $f(x) = \frac{1}{5x - 4}$

مثال 10: $f(x) = \frac{4x - 2}{2x - 1}$

مثال 11: $f(x) = (2x - 1)^7$

تطبيقات الدالة المشتقة:

1. رتابة دالة وإشارة مشتقاتها خاصية 1

لتكن f دالة عددية قابلة للاشتقاق على مجال I

• إذا كانت f تزايدية على مجال I فإن $f'(x) \geq 0$ $\forall x \in I$

• إذا كانت f تناقصية على مجال I فإن $f'(x) \leq 0$ $\forall x \in I$

$\forall x \in I$

• إذا كانت f ثابتة على مجال I فإن $f'(x) = 0$ $\forall x \in I$

خاصية 2

لتكن f دالة عددية قابلة للاشتقاق على مجال I

• إذا كانت f' موجبة قطعاً على المجال I فإن f تزايدية قطعاً على مجال I

• إذا كانت f' سالبة قطعاً على المجال I فإن f تناقصية قطعاً على مجال I

• إذا كانت f' منعدمة على المجال I فإن f ثابتة على مجال I

مثال: نعتبر الدالة f المعرفة كالتالي: $f(x) = x^2 + 2x - 2$

(1) حدد D_f (2) أحسب نهايات f عند محددات D_f

(3) أدرس تغيرات f حدد جدول تغيرات f

الجواب: (1) الدالة f حدودية إذن $D_f = \mathbb{R}$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 + 2x - 2 = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 + 2x - 2 = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$$

$$\forall x \in \mathbb{R} : f'(x) = (x^2 + 2x - 2)' = 2x + 2$$

$$f'(x) = 0 \text{ يعني } 2x + 2 = 0 \text{ يعني } x = -1$$

ندرس إشارة: $f'(x)$

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$2x+2$	$-$	0	$+$

إذا كانت: $x \in [-1; +\infty]$ فإن: $f'(x) \geq 0$ ومنه f تزايدية

إذا كانت: $x \in]-\infty; -1]$ فإن: $f'(x) \leq 0$ ومنه f تناقصية

(4) نلخص النتائج في جدول يسمى جدول التغيرات:

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$	-3	$+\infty$

2. مطاريف دالة قابلة للاشتقاق

خاصية 1: لتكن f دالة قابلة للاشتقاق على مجال مفتوح I و a

عنصراً من I

• إذا كانت f دالة قابلة للاشتقاق في النقطة a وتقبل مطراً في

$$f'(a) = 0$$

خاصية 2:

لتكن f دالة قابلة للاشتقاق على مجال مفتوح I و a عنصراً من I

إذا كانت f تنعدم في النقطة a تتغير إشارتها فإن $f(a)$

مطراً للدالة f

$$f(x) = (3x+4)^3 \quad (9) \quad \text{نستعمل القاعدة التالية: } (u^n)' = nu^{n-1} \times u'$$

$$f'(x) = (3x+4)^3' = 3 \times (3x+4)^{3-1} \times (3x+4)' = 3 \times 3 \times (3x+4)^2 = 9(3x+4)^2$$

تمرين 3: حدد الدالة المشتقة للدالة f في كل حالة من الحالات التالية:

$$f(x) = 2x^3 \quad (3) \quad f(x) = 7x + 15 \quad (2) \quad f(x) = 11 \quad (1)$$

$$f(x) = \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{4}x^4 - 4x - 6 \quad (5) \quad f(x) = 4x^4 - \frac{1}{3}x^3 - x + 1 \quad (4)$$

$$f(x) = \frac{1}{5x+7} \quad (8) \quad f(x) = 4\sqrt{x} - 1 \quad (7) \quad f(x) = \frac{3}{x} \quad (6)$$

$$f(x) = \frac{7x}{x^3+1} \quad (10) \quad f(x) = \sqrt{x^2+8x} \quad (9)$$

$$f(x) = (2x-1)^7 \quad (12) \quad f(x) = \frac{4x-3}{2x-1} \quad (11)$$

$$f'(x) = (7x+15)' = 7 \quad (2) \quad f'(x) = (11)' = 0 \quad (1) \quad \text{أجوبة:}$$

$$f'(x) = (2x^3)' = 2 \times 3x^{3-1} = 6x^2 \quad (3)$$

$$f'(x) = \left(4x^4 - \frac{1}{3}x^3 - x + 1\right)' = 4 \times 4x^{4-1} - \frac{1}{3} \times 3x^{3-1} - 1 + 0 = 16x^3 - x^2 - 1 \quad (4)$$

$$f'(x) = \left(\frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{4}x^4 - 4x - 6\right)' = \frac{1}{5} \times 5x^{5-1} - \frac{1}{4} \times 4x^{4-1} - 4 + 0 = x^4 - x^3 - 4 \quad (5)$$

$$f'(x) = \left(\frac{3}{x}\right)' = \left(3 \times \frac{1}{x}\right)' = 3 \times \left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{3}{x^2} \quad (6)$$

$$f'(x) = (4\sqrt{x} - 1)' = 4 \times \frac{1}{2\sqrt{x}} - 0 = \frac{2}{\sqrt{x}} = \frac{2\sqrt{x}}{x} \quad (7)$$

$$\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2} \quad \text{نستعمل القاعدة التالية:}$$

$$f'(x) = \left(\frac{1}{5x+7}\right)' = -\frac{(5x+7)'}{(5x+7)^2} = -\frac{5}{(5x+7)^2}$$

$$f(x) = \sqrt{x^2+8x} \quad (9) \quad \text{نستعمل القاعدة التالية: } (\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$$

$$f'(x) = (\sqrt{x^2+8x})' = \frac{(x^2+8x)'}{2\sqrt{x^2+8x}} = \frac{2x+8}{2\sqrt{x^2+8x}} = \frac{x+4}{\sqrt{x^2+8x}}$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2} \quad \text{نستعمل القاعدة التالية: } f(x) = \frac{7x}{x^3+1} \quad (10)$$

$$f'(x) = \left(\frac{7x}{x^3+1}\right)' = \frac{(7x)'(x^3+1) - 7x(x^3+1)'}{(x^3+1)^2} = \frac{7(x^3+1) - 7x \times 3x^2}{(x^3+1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{7x^3 + 7 - 21x^3}{(x^3+1)^2} = \frac{7 - 14x^3}{(x^3+1)^2}$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2} \quad \text{نستعمل القاعدة التالية: } f(x) = \frac{4x-3}{2x-1} \quad (11)$$

$$f'(x) = \left(\frac{4x-3}{2x-1}\right)' = \frac{(4x-3)'(2x-1) - (4x-3)(2x-1)'}{(2x-1)^2} = \frac{4(2x-1) - 2(4x-3)}{(2x-1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{4(2x-1) - 2(4x-3)}{(2x-1)^2} = \frac{8x-4-8x+6}{(2x-1)^2} = \frac{2}{(2x-1)^2}$$

$$f(x) = (2x-1)^7 \quad (12) \quad \text{نستعمل القاعدة التالية: } (u^n)' = nu^{n-1} \times u'$$

$$f'(x) = ((2x-1)^7)' = 7 \times (2x-1)^{7-1} \times (2x-1)' = 14(2x-1)^6$$

نحل المعادلة باستعمال المميز

$$c=1 \text{ و } b=1 \text{ و } a=2$$

$$\Delta=b^2-4ac=(1)^2-4 \times 1 \times 2=-7<0$$

ومنه هذه المعادلة ليس لها حل: وبالتالي التمثيل المبياني

لا يقطع محور الأفاسيل

ب)نقط تقاطع (C_f) المنحنى الممثل للدالة f مع محور الأرتايب

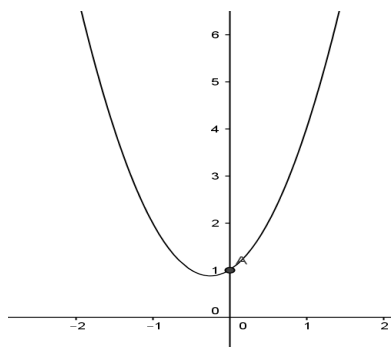
نحسب فقط : $f(0)$

$$f(0)=1 \text{ ومنه نقطة التقاطع هي: } A(0;1)$$

(7)الدالة تقبل قيمة دنيا هي : $\frac{7}{8}$

(8)رسم : C_f

2-	-1	-1/4	0	1	2
7	2	7/8	1	4	11



ملاحظة : بالنسبة لـ $f(x) = -x^2 + 2x + 3$ وتحديد نقط التقاطع

مع محور الأفاسيل نحل المعادلة : $f(x) = 0$ يعني

$$-x^2 + 2x + 3 = 0$$

نحل المعادلة باستعمال المميز

$$c=3 \text{ و } b=2 \text{ و } a=-1$$

$$\Delta=b^2-4ac=(2)^2-4 \times 3 \times (-1)=16=(4)^2>0$$

بما أن $\Delta > 0$ فان هذه المعادلة تقبل حلين هما:

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ و } x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x_2 = \frac{-2 - \sqrt{16}}{-2} = 3 \text{ و } x_1 = \frac{-(2) + \sqrt{16}}{-2} = -1$$

ومنه نقط التقاطع هما: $A(-1;0)$ أو $B(3;0)$

مثال: حدد مطارييف الدالة f المعرفة كالتالي : $f(x) = x^2 - 6x + 1$

$$f'(x) = (x^2 - 6x + 1)' = 2x - 6 \text{ و } D_f = \mathbb{R} \text{ : الجواب}$$

$$f'(x) = 0 \text{ يعني } 2x - 6 = 0 \text{ يعني } x = 3$$

ندرس اشارة : $f'(x)$ ونحدد جدول التغيرات

x	$-\infty$	3	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$+\infty$	-8	$+\infty$

f' تنعدم في 3 و تتغير إشارتها اذن $f(3) = -8$ مطرا ف للدالة f

وبالضبط قيمة دنيا للدالة f

تمرين 4: نعتبر الدالة f المعرفة كالتالي : $f(x) = 2x^2 + x + 1$

$$f(x) = -x^2 + 2x + 3 \text{ أو } f(x) = -x^2 + 2x + 3$$

(1) حدد D_f (2) أحسب نهايات f عند محداث D_f

(3) أحسب مشتقة الدالة f و أدرس اشارتها (4) حدد جدول تغيرات f

(5) حدد معادلة لمماس منحنى الدالة f في النقطة الذي أفصولها $x_0 = 1$

(6) حدد نقط تقاطع (C_f) مع محوري المعلم

(7) حدد مطارييف الدالة f ان وجدت

(8) أرسم (C_f) في معلم متعامد ممنظم

$$f(x) = 2x^2 + x + 1 \text{ : الجواب}$$

(1) الدالة f حدودية اذن $D_f = \mathbb{R}$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} 2x^2 + x + 1 = \lim_{x \rightarrow -\infty} 2x^2 = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x^2 + x + 1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x^2 = +\infty$$

$$\forall x \in \mathbb{R} : f'(x) = (2x^2 + x + 1)' = 4x + 1$$

$$f'(x) = 0 \text{ يعني } 4x + 1 = 0 \text{ يعني } x = -\frac{1}{4}$$

ندرس اشارة : $f'(x)$

x	$-\infty$	$-\frac{1}{4}$	$+\infty$
$4x+1$	-	0	+

(4) جدول التغيرات :

x	$-\infty$	$-\frac{1}{4}$	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$+\infty$	$\frac{7}{8}$	$+\infty$

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \quad (5)$$

$$y = 5x - 21 \Leftrightarrow y = 4 + 5(x - 5) \Leftrightarrow y = f(1) + f'(1)(x - 1)$$

$$\text{لأن : } f(1) = 4 \text{ و } f'(1) = 5$$

(6) (أ)نقط تقاطع (C_f) المنحنى الممثل للدالة f مع محور

الأفاسيل

نحل فقط المعادلة : $f(x) = 0$ يعني $2x^2 + x + 1 = 0$