

ملخص درس النهايات

ومنه : $\lim_{x \rightarrow 3^+} -2x + 6 = 0^-$ وبالتالي $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x-4}{-2x+6} = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x-4}{-2x+6} = -\infty$ وبالتالي $\lim_{x \rightarrow 3^-} -2x + 6 = 0^+$

III. العمليات على النهايات

في كل ما يلي a عدد حقيقي أو يساوي $+\infty$ أو $-\infty$ و l و l' عدنان حقيقيان وهذه العمليات تبقى صالحة على اليمين و اليسار

(1) النهاية و الجمع:

$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$	l	l	l	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim_{x \rightarrow a} g(x)$	l'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim_{x \rightarrow a} (f+g)(x)$	$l+l'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	شكل غير محدد	

مثال: أحسب النهايات التالية : $\lim_{x \rightarrow 0^+} 3x + 7 + \frac{1}{\sqrt{x}}$

الجواب : $\lim_{x \rightarrow 0^+} 3x = 0$ و $\lim_{x \rightarrow 0^+} 7 = 7$ و $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$ ومنه:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} 3x + 7 + \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$$

(2) النهاية و الضرب:

$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$	l	$l > 0$	$l < 0$	$l > 0$	$l < 0$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	0	$+\infty$	$-\infty$
$\lim_{x \rightarrow a} g(x)$	l'	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	0
$\lim_{x \rightarrow a} (f \cdot g)(x)$	$l \cdot l'$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	شكل غير محدد		

(3) النهاية و المقلوب:

$\lim_{x \rightarrow a} g(x)$	$l' \in \mathbb{R}^*$	$+\infty$	$-\infty$	0^+	0^-
$\lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{1}{g}\right)(x)$	$\frac{1}{l'}$	0	0	$+\infty$	$-\infty$

(4) النهاية و الخارج:

$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$	l	l	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim_{x \rightarrow a} g(x)$	$\neq 0$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	0^+	0^+	0^-	0^-	< 0	> 0	$-\infty$
$\lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{f}{g}\right)(x)$	$\frac{l}{l'}$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	شكل غير محدد	

(5) نهاية الدالة الحدودية

نهاية دالة حدودية عندما تؤول x إلى $+\infty$ أو إلى $-\infty$ هي نهاية حدها الأكبر درجة

مثال : $\lim_{x \rightarrow +\infty} 3x^2 + 5x - 4$

الجواب : $\lim_{x \rightarrow +\infty} 3x^2 + 5x - 4 = \lim_{x \rightarrow +\infty} 3x^2 = +\infty$

(6) نهاية الدالة الجذرية

نهاية دالة جذرية عندما تؤول x إلى $+\infty$ أو إلى $-\infty$ هي خارج نهاية حدها الأكبر درجة.

مثال : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^6 - x^2 + 1}{x^4 + x - 4}$

الجواب : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^6 - x^2 + 1}{x^4 + x - 4} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^6}{x^4} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x^{6-4} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x^2 = +\infty$

I. نهايات اعتيادية:

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^3 = 0 \quad \lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0 \quad \lim_{x \rightarrow 0} x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^n = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = +\infty \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = +\infty \quad \text{إذا كان } n \text{ زوجي} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = -\infty \quad \text{إذا كان } n \text{ فردي}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^n} = 0 \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0^- \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0^+$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^n} = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty \quad \text{وتقرأ النهاية عندما يؤول } x \text{ إلى } 0 \text{ على اليمين}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty \quad \text{وتقرأ النهاية عندما يؤول } x \text{ إلى } 0 \text{ على اليسار}$$

خاصية : لتكن f دالة عددية و l عددا حقيقيا

إذا كانت f تقبل نهاية l في $+\infty$ (أو في $-\infty$) فإن هذه النهاية وحيدة.

II. النهاية على اليمين والنهاية على اليسار لدالة في نقطة

■ إذا كانت $f(x)$ يؤول إلى l عندما يؤول x إلى a على اليمين

فإننا نكتب : $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = l$ أو $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = l$

■ إذا كانت $f(x)$ يؤول إلى l عندما يؤول x إلى a على اليسار

فإننا نكتب : $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = l$ أو $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = l$

نهايات اعتيادية: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = -\infty$ • $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = +\infty$ • $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x} = 0$ • $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^n} = +\infty$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x} = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^n} = +\infty$$

■ إذا كان n زوجي غير منعدم , فإن $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^n} = +\infty$

■ إذا كان n فردي غير منعدم , فإن $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^n} = -\infty$

مثال: أحسب النهايات التالية: (1) $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{3x+1}{2x-6}$ و $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{3x+1}{2x-6}$

$$(2) \quad \lim_{x \rightarrow 3^\pm} \frac{x-4}{-2x+6}$$

أجوبة : (1) $\lim_{x \rightarrow 3^+} 2x - 6 = 0$ و $\lim_{x \rightarrow 3^+} 3x + 1 = 9 + 1 = 10$

x	$-\infty$	3	$+\infty$
$2x-6$	$-$	0	$+$

ومنه : $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{3x+1}{2x-6} = +\infty$ وبالتالي $\lim_{x \rightarrow 3^+} 2x - 6 = 0^+$

$\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{3x+1}{2x-6} = -\infty$ وبالتالي $\lim_{x \rightarrow 3^-} 2x - 6 = 0^-$

(2) $\lim_{x \rightarrow 3^+} -2x + 6 = 0$ و $\lim_{x \rightarrow 3^+} x - 4 = -1$

x	$-\infty$	3	$+\infty$
$-2x+6$	$+$	0	$-$