

النهايات

(1) نهايات الدوال المرجعية في الصفر

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^3 = 0 \quad \bullet$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0 \quad \bullet$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x = 0 \quad \bullet$$

(2) النهاية المنعدمة لدالة عددية في الصفر

نقول إن دالة عددية f ، معرفة على مجال منقط مركزه الصفر ، تؤول إلى الصفر عندما يؤول x إلى الصفر إذا كانت $f(x)$ تقترب من الصفر كلما اقترب x من الصفر ، و نكتب $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$

(3) النهاية المنتهية في نقطة

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - l) = 0 \quad \text{تكافئ} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$$

- إذا كانت P دالة حدودية فإنه لكل x_0 من $\mathbb{R}$ ، لدينا : $\lim_{x \rightarrow x_0} P(x) = P(x_0)$
- إذا كانت R دالة حدودية فإنه لكل x_0 من مجموعة تعريفها ، لدينا : $\lim_{x \rightarrow x_0} R(x) = R(x_0)$

(4) نهاية على اليمين ، نهاية على اليسار في نقطة

- الدوال المعرفة على يمين x_0 ، هي الدوال المعرفة على مجال من نوع $]x_0, a[$ حيث $a > x_0$.
- الدوال المعرفة على يسار x_0 ، هي الدوال المعرفة على مجال من نوع $]b, x_0[$ حيث $b < x_0$.

- نقول إن الدالة f تقبل النهاية l على اليمين في x_0 ، إذا كانت تنطبق على يمين x_0 مع دالة معرفة على مجال مفتوح منقط مركزه x_0 تكون نهايتها هي l عند x_0 .
و نكتب : $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = l$ أو $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x > x_0}} f(x) = l$
- لدينا تعريف مشابه بالنسبة للنهاية على اليسار في النقطة x_0 ، و نكتب $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x < x_0}} f(x) = l$ أو $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = l$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \text{ تكافئ } \left(\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = l \text{ و } \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = l \right)$$

5) النهاية المنتهية في $+\infty$ أو $-\infty$

نهايات مقلوبات الدوال المرجعية في $+\infty$ و $-\infty$

$$\begin{array}{lll} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^3} = 0 & \bullet & \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} = 0 & \bullet & \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0 & \bullet \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^3} = 0 & \bullet & \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^2} = 0 & \bullet & \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0 & \bullet \end{array}$$

النهاية المنعدمة لدالة عددية في $+\infty$ أو $-\infty$

- نهاية f هي الصفر عندما يؤول x إلى $+\infty$ تعني أنه كلما كبر العدد x و كان موجبا كلما اقترب العدد $f(x)$ من الصفر . و نكتب : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$
- نهاية f هي الصفر عندما يؤول x إلى $-\infty$ تعني أنه كلما كبرت القيمة المطلقة للعدد x و كان سالبا كلما اقترب العدد $f(x)$ من الصفر . و نكتب : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$

النهاية المنتهية في $+\infty$ أو $-\infty$

$$\begin{array}{ll} \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - l) = 0 \text{ تكافئ } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l & \bullet \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - l) = 0 \text{ تكافئ } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = l & \bullet \end{array}$$

(6) النهاية اللامنتهية في نقطة

النهايات اللامنتهية لدوال مرجعية

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^3} = +\infty \quad \bullet$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^2} = +\infty \quad \bullet$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty \quad \bullet$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x^3} = -\infty \quad \bullet$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x^2} = +\infty \quad \bullet$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty \quad \bullet$$

النهاية اللامنتهية في نقطة

$$\bullet \quad \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty \quad \text{تعني أن عندما يقترب العدد } x \text{ من } x_0 \text{ فإن العدد } f(x) \text{ يصبح كبيرا}$$

$$\checkmark \quad \text{إذا كان } \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0^+ \text{ فإن } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{g(x)} = +\infty$$

$$\checkmark \quad \text{إذا كان } \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0^- \text{ فإن } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{g(x)} = -\infty$$

(7) النهاية اللامنتهية في $+\infty$ أو $-\infty$

نهايات الدوال المرجعية في $+\infty$ أو $-\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty \quad \bullet$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty \quad \bullet$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty \quad \bullet$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty \quad \bullet$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty \quad \bullet$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty \quad \bullet$$

(8) العمليات على النهايات

حالة النهايات المنتهية

إذا كان لدينا : $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$ و $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = m$ فإن :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} (f \cdot g)(x) &= l \times m \quad \bullet & \lim_{x \rightarrow a} kf(x) &= kl \quad \bullet & \lim_{x \rightarrow a} (f + g)(x) &= l + m \quad \bullet \\ \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} &= \frac{1}{m} \quad (m \neq 0) \quad \bullet & \lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{g(x)} &= \frac{1}{m} \quad (m \neq 0) \quad \bullet \end{aligned}$$

حالة النهايات اللامنتهية :

✓ إذا كان لدينا : $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ فإن :

▪ إذا كان $k > 0$ فإن : $\lim_{x \rightarrow a} kf(x) = +\infty$

▪ إذا كان $k < 0$ فإن : $\lim_{x \rightarrow a} kf(x) = -\infty$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{f(x)} = 0 \quad \bullet$$

✓ إذا كان لدينا : $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ و كانت f موجبة فإن : $\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{f(x)} = +\infty$

✓ إذا كانت $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = m$ و $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ فإن :

$$\lim_{x \rightarrow a} (f + g)(x) = +\infty \quad \bullet$$

$$\lim_{x \rightarrow a} (f \cdot g)(x) = +\infty \quad \text{إذا كان } m > 0 \quad \bullet$$

$$\lim_{x \rightarrow a} (f \cdot g)(x) = -\infty \quad \text{إذا كان } m < 0 \quad \bullet$$

✓ إذا كانت $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = +\infty$ فإن $\lim_{x \rightarrow a} (f + g)(x) = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow a} (f \cdot g)(x) = +\infty$

• نهاية دالة حدودية بجوار ما لانهاية هي نهاية حدها الأعلى درجة أي :

$$\lim_{|x| \rightarrow +\infty} a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = \lim_{|x| \rightarrow +\infty} a_n x^n \quad \text{مع } (a_n \neq 0)$$

• نهاية دالة جذرية بجوار ما لانهاية هي نهاية خارج حديها الأعلى درجة

• الكتابة $|x| \rightarrow +\infty$ تعني $x \rightarrow +\infty$ أو $x \rightarrow -\infty$

9 الأشكال الغير المحددة

- الكتابات التالية : " $\frac{0}{0}$ " أو " $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ " أو " $0 \times (\pm\infty)$ " أو " $(+\infty) + (-\infty)$ " تسمى أشكال غير محددة
- في حالة الحصول على شكل غير محدد فإننا نلجأ إلى تغيير طريقة حساب النهاية و غالبا ما نقوم إما بالتعميل أو النشر أو الضرب في المرافق .