

تمارين تطبيقية مصاحبة للدرس 3 مع حلولها

$$U_{n+1} = \frac{5(n+1)-3}{3} = \frac{5n+2}{3} - 3$$

$$U_{n-1} = \frac{5(n-1)-3}{3} = \frac{5n-8}{3}$$

$$U_{2n} = \frac{5 \cdot 2n - 3}{3} = \frac{10n - 3}{3}$$

تمرين 1

نعتبر المتتالية العددية $(U_n)_n$ المعرفة بالصيغة

الصريحة : $U_n = \frac{5n-3}{3}$ لكل n من IN :

1 - أحسب U_0 و U_1 و U_{10} .

2 - هل 72 حد من حدود المتتالية ؟

3 - حدد بدلالة n كل من U_{n+1} و U_{n-1} و U_{2n} .

تمرين 2

نعتبر المتتالية العددية $(V_n)_n$ المعرفة بالصيغة

الترجعية التالية: $U_0=1$ و $U_{n+1} = 5U_n - 7$ لكل n من IN

1 - أحسب U_1 و U_2 و U_4 .

2 - حدد علاقة بين U_n و U_{n-1} .

حل التمرين 2

1 - حساب U_1 .

• نعوض n بـ 0 :

$$U_{0+1} = 5U_0 - 7$$

$$U_1 = 5 \cdot 1 - 7 = -2$$

- حساب U_2 .

• نعوض n بـ 1 :

$$U_{1+1} = 5U_1 - 7$$

$$U_2 = 5(-2) - 7 = -17$$

- لحساب U_4 نحسب أولاً U_3 .

$$U_3 = 5U_2 - 7 = 5(-17) - 7$$

$$U_3 = -85 - 7 = -92$$

$$U_4 = 5U_3 - 7$$

ومنه :

$$U_4 = 5(-92) - 7$$

$$U_4 = -460 - 7$$

$$U_4 = -467$$

2 - لنحدد علاقة بين U_n و U_{n-1} :

لدينا : $U_{n+1} = 5U_n - 7$

ومنه نعوض n بـ $(n-1)$ نجد :

$$U_{n-1+1} = 5U_{n-1} - 7$$

$$U_n = 5U_{n-1} - 7$$

ومنه :

حل التمرين 1

1 - لدينا : $U_n = \frac{5n-3}{3}$ ($\forall n \in IN$) :

ومنه :

• نعوض n بـ 0 :

$$U_0 = \frac{5 \cdot 0 - 3}{3} = \frac{-3}{3} = -1$$

• نعوض n بـ 1 :

$$U_1 = \frac{5 \cdot 1 - 3}{3} = \frac{5 - 3}{3} = \frac{2}{3}$$

• نعوض n بـ 10 :

$$U_{10} = \frac{5 \cdot 10 - 3}{3} = \frac{50 - 3}{3} = \frac{47}{3}$$

2 - لنحل في المجموعة IN المعادلة : $U_n = 72$

$$\frac{5n-3}{3} = 72 \quad \text{أي :}$$

$$5n - 3 = 72 \times 3 \quad \text{ومنه :}$$

$$5n - 3 = 216$$

$$5n = 216 + 3 = 219$$

$$n = \frac{219}{5} \notin IN$$

إذن 72 ليس حدا من حدود المتتالية $(U_n)_n$.

تمرين 3

نعتبر المتتالية العددية $(U_n)_n$ المعرفة كما يلي :

$$(\forall n \in \mathbb{N}); U_n = 2n + 3$$

1 - بين أن المتتالية $(U_n)_n$ حسابية محددا أساسها r .

2 - حدد قيمة المجموع : $S = U_0 + U_1 + \dots + U_{13}$

حل التمرين 3

1 - لنبين أن $(U_n)_n$ متتالية حسابية.

$$U_n = 2n + 3 \quad \text{لدينا :}$$

$$U_{n+1} = 2(n+1) + 3$$

$$U_{n+1} = 2n + 2 + 3 \quad \text{ومنه :}$$

$$U_{n+1} = 2n + 5$$

$$U_{n+1} - U_n = (2n + 5) - (2n + 3) \quad \text{إذن :}$$

$$U_{n+1} - U_n = 2n + 5 - 2n - 3$$

$$U_{n+1} - U_n = 5 - 3$$

$$U_{n+1} - U_n = 2$$

ومنه $(U_n)_n$ متتالية حسابية أساسها $r=2$

2 - لنحدد قيمة المجموع S :

$$S = \frac{(13 - 0 + 1)}{2} (U_0 + U_{13})$$

$$U_0 = 2 \cdot 0 + 3 = 3 \quad \text{نعلم أن :}$$

$$U_{13} = 2 \cdot 13 + 3 = 19 \quad \text{و}$$

$$S = \frac{14}{2} (3 + 19) \quad \text{ومنه :}$$

$$S = 7.22$$

$$S = 154$$

تمرين 4

نعتبر المتتاليتين :

$$\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = 3U_n + 6 \end{cases} ; (n \in \mathbb{N})$$

و $(V_n)_n$ بحيث :

$$V_n = U_n + 3$$

1 - أحسب U_1 و V_0 و V_1 ؟

2 - بين أن $(V_n)_n$ متتالية هندسية محددا أساسها q .

3 - أ - أحسب V_n بدلالة n .

ب - أحسب U_n بدلالة n .

حل التمرين 4

1 - حساب U_1 :

$$U_1 = 3U_0 + 6 = 3 \cdot 1 + 6 = 9$$

• حساب V_0 :

$$V_0 = U_0 + 3 = 1 + 3 = 4$$

• حساب V_1 :

$$V_1 = U_1 + 3 = 9 + 3 = 12$$

2 - لنبين أن $(V_n)_n$ متتالية هندسية.

$$V_n = U_n + 3 \quad \text{نعلم أن :}$$

$$V_{n+1} = U_{n+1} + 3 \quad \text{ومنه :}$$

$$U_{n+1} = 3U_n + 6 \quad \text{وبما أن :}$$

$$V_{n+1} = (3U_n + 6) + 3 \quad \text{فإن :}$$

$$V_{n+1} = 3U_n + 9$$

$$V_{n+1} = 3(U_n + 3) \quad \text{ومنه :}$$

$$V_{n+1} = 3V_n \quad \text{إذن :}$$

وهذا يعني أن $(V_n)_n$ متتالية هندسية أساسها $q=3$.

3 - أ - حساب V_n بدلالة n .

$(V_n)_n$ متتالية هندسية أساسها $q=3$ وحدها الأول $V_0=4$.

$$(\forall n \in \mathbb{N}); V_n = V_0 \cdot q^n \quad \text{إذن :}$$

$$V_n = 4 \cdot 3^n \quad \text{ومنه :}$$

ب - حساب U_n بدلالة n .

$$(\forall n \in \mathbb{N}); V_n = U_n + 3 \quad \text{نعلم أن :}$$

$$U_n = V_n - 3 \quad \text{ومنه :}$$

$$U_n = 4 \cdot 3^n - 3 \quad \text{إذن :}$$

ومنه المطلوب.