

الأستاذ:
نجيب
عثماني

تمارين محلولة: المتتاليات العددية
السنة الأولى من سلك البكالوريا مسك الآداب
والعلوم الانسانية

أكاديمية
الجهة
الشرقية

الأجوبة:

$$u_{n+1} - u_n = (5(n+1)+6) - (5n+6) = (5n+5+6) - (5n+6) \\ = (5n+11) - (5n+6) = 5n+11-5n-6 = 5 \\ u_{n+1} - u_n = 5 = r$$

أستنتج أن : المتتالية $(u_n)_{n \geq 0}$ هي حسابية أساسها : $r = 5$

تمرين 5: نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة كالتالي : $u_n = \frac{n+3}{4}$

$$\forall n \in \mathbb{N}$$

بين أن المتتالية (u_n) حسابية وحدد أساسها وحدها الأول

$$u_{n+1} - u_n = \frac{(n+1)+3}{4} - \frac{n+3}{4} = \frac{1}{4} = r$$

ومنه المتتالية $(u_n)_{n \in \mathbb{I}}$ هي حسابية أساسها $\frac{1}{4} = r$

$$u_0 = \frac{3}{4}$$

تمرين 6: لتكن (u_n) متتالية حسابية أساسها $r = \frac{1}{2}$ و $u_6 = 31$

(1) أحسب u_0 أكتب u_n بدلالة n

(3) أحسب : u_{2015} ثم u_{2016}

(الأجوبة: 1) لدينا (u_n) حسابية اذن : $u_n = u_0 + nr$

$$\text{ومنه : } u_6 = u_0 + 6 \times \frac{1}{2} \text{ يعني } 31 = u_0 + 3 \text{ يعني } 28 = u_0$$

$$u_n = 28 + \frac{n}{2} \text{ يعني } u_n = u_0 + nr \quad (2)$$

$$u_{2015} = 28 + \frac{2015}{2} = \frac{2071}{2} \quad (3)$$

$$u_{2016} = 28 + \frac{2016}{2} = 28 + 1008 = 1036$$

تمرين 7: لتكن (u_n) متتالية حسابية أساسها r وبحيث $u_0 = 5$

و $u_{100} = -45$ حدد r (2) أحسب : u_{2015} و u_{2016}

(الأجوبة: 1) لدينا (u_n) حسابية اذن : $u_n = u_0 + nr$

$$\text{ومنه : } u_{100} = u_0 + 100r \text{ يعني } -45 = 5 + 100r$$

$$\text{يعني } -50 = 100r \text{ يعني } r = -\frac{1}{2}$$

(2) (u_n) حسابية اذن :

$$u_n = u_0 + nr \text{ يعني } u_n = 5 + 2015 \times \left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$\text{يعني } u_{2015} = 5 - \frac{2005}{2} = \frac{-2005}{2}$$

$$\text{ومنه } u_{2016} = \frac{-2005}{2} + \frac{-1}{2} = \frac{-2006}{2} = -1003$$

تمرين 1: لاحظ ثم أتمم بأربعة أعداد ملائمة لتسلسل كل متتالية من المتتاليات التالية :

$$(1) 10, 8, 6, 4, 2, 0, \dots$$

$$(2) -12, -9, -6, -3, 0, 3, 6, \dots$$

$$(3) 243, 81, 27, 9, 3, 1, \dots$$

$$(4) \frac{1}{32}, \frac{1}{16}, \frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1, \dots$$

$$36, 25, 16, 9, 4, 1, \dots$$

(الأجوبة: 1) $18, 16, 14, 12, 10, 8, 6, 4, 2, 0, \dots$

$$(2) -24, 21, -18, -15, -12, -9, -6, -3, 0, 3, 6, \dots$$

$$(3) 19683, 6561, 2187, 729, 243, 81, 27, 9, 3, 1, \dots$$

$$(4) \frac{1}{512}, \frac{1}{256}, \frac{1}{128}, \frac{1}{64}, \frac{1}{32}, \frac{1}{16}, \frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1, \dots$$

تمرين 2: نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n \geq 0}$ المعرفة

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = 2n + 3$$

1. أحسب حدها الأول u_0

2. أحسب الحدود الأربعة الأولى للمتتالية $(u_n)_{n \geq 0}$

(الأجوبة: 1) $u_0 = 2 \times 0 + 3 = 3$

$$u_1 = 2 \times 1 + 3 = 5$$

$$u_2 = 2 \times 2 + 3 = 4 + 3 = 7 \quad \text{و} \quad u_3 = 2 \times 3 + 3 = 9$$

نلاحظ أن فرق حدين متتالين هو العدد 2

تمرين 3: نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n \geq 0}$ المعرفة بالصيغة

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = 2n - 1$$

(1) أحسب حدها الأول u_0 و أحسب الحدود الأربعة الأولى للمتتالية $(u_n)_{n \geq 1}$

(2) أحسب $u_{n+1} - u_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$ ماذا تستنتج ؟

(الأجوبة: 1) $u_0 = 2 \times 0 - 1 = 0 - 1 = -1$

$$u_1 = 2 \times 1 - 1 = 2 - 1 = 1$$

$$u_2 = 2 \times 2 - 1 = 4 - 1 = 3$$

$$u_3 = 2 \times 3 - 1 = 6 - 1 = 5$$

(2)

$$u_{n+1} - u_n = (2(n+1) - 1) - (2n - 1) = (2n + 2 - 1) - (2n - 1)$$

$$= (2n + 2 - 1) - (2n - 1) = (2n + 1) - (2n - 1) = 2n + 1 - 2n + 1 = 2$$

$$u_{n+1} - u_n = 2 = r$$

ومنه أستنتج أن : المتتالية $(u_n)_{n \geq 0}$ هي حسابية أساسها : $r = 2$

تمرين 4: نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة كالتالي :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = 5n + 6$$

أحسب : $u_{n+1} - u_n$ و ماذا تستنتج ؟

تمرين 8: لتكن المتتالية الحسابية $(u_n)_{n \geq 1}$ الذي أساسها $r = 3$ وحدها

$$u_0 = 5$$

(1) أكتب u_n بدلالة n وحدد u_8 و u_{13}

(2) أحسب المجموع التالي : $S = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_{13}$

الأجوبة:1: وبما أن (u_n) متتالية حسابية أساسها $r = 3$ وحدها

$$u_0 = 5$$

فان : $u_n = u_0 + (n-0)r$ أي : $u_n = 5 + 3(n-0)$ أي : $u_n = 3n + 5$

$$\text{ومنه : } u_8 = 3 \times 8 + 5 = 29$$

$$(2) S = u_0 + u_1 + \dots + u_{13} = (13-0+1) \frac{u_0 + u_{13}}{2}$$

$$S = 14 \frac{u_0 + u_{13}}{2} = \frac{14}{2} (5 + u_{13})$$

$$\text{وبالتالي: } S = 7(5 + 44) = 7 \times 49 = 343$$

تمرين 9:

(1) لتكن (u_n) متتالية حسابية أساسها $r = \frac{1}{2}$ وحدها الأول $u_0 = 1$

أحسب المجموع التالي : $S_1 = u_3 + u_4 + u_5 + \dots + u_{30}$

(2) لتكن (u_n) متتالية حسابية أساسها $r = -2$ وحدها الأول $u_0 = 4$

أحسب المجموع التالي : $S_2 = u_7 + u_8 + u_9 + \dots + u_{25}$

الأجوبة:1: $S_1 = u_3 + u_4 + u_5 + \dots + u_{30} = (30-3+1) \frac{u_3 + u_{30}}{2}$

$$S_1 = (28) \frac{u_3 + u_{30}}{2}$$

وبما أن (u_n) متتالية حسابية أساسها $r = \frac{1}{2}$ وحدها الأول $u_0 = 1$

$$\text{فان : } u_n = u_0 + (n-0)r$$

$$\text{أي : } u_n = 1 + (n-0) \frac{1}{2} \text{ أي : } u_n = 1 + \frac{n}{2}$$

$$\text{ومنه نحسب : } u_3 = 1 + \frac{3}{2} = \frac{5}{2} \text{ و } u_{30} = 1 + \frac{30}{2} = \frac{32}{2} = 16$$

$$\text{وبالتالي: } S_1 = (28) \frac{u_3 + u_{30}}{2} = 14 \left(\frac{5}{2} + 16 \right) = 14 \left(\frac{37}{2} \right) = 7 \times 37 = 259$$

$$(2) S_2 = u_7 + u_8 + u_9 + \dots + u_{25} = (25-7+1) \frac{u_7 + u_{25}}{2} = (19) \frac{u_7 + u_{25}}{2}$$

وبما أن (u_n) متتالية حسابية أساسها $r = -2$ وحدها الأول

$$u_0 = 4$$

$$\text{فان : } u_n = u_0 + (n-0)r$$

$$\text{أي : } u_n = 4 + (n-0)(-2) \text{ أي : } u_n = 4 - 2n$$

$$\text{نحسب : } u_7 = 4 - 2 \times 7 = 4 - 14 = -10$$

$$\text{و } u_{25} = 4 - 2 \times 25 = 4 - 50 = -46$$

وبالتالي:

$$S_2 = (19) \frac{u_7 + u_{25}}{2} = (19) \frac{-10 + (-46)}{2} = (19) \frac{-56}{2} = 19 \times -28 = -532$$

تمرين 10: لتكن المتتالية الحسابية $(u_n)_{n \geq 1}$ الذي أساسها $r = 2$

$$\text{وحدها الأول } u_0 = 3$$

(1) أكتب u_n بدلالة n وحدد u_1 و u_{10}

(2) أحسب المجموع التالي : $S = u_1 + u_1 + u_2 + \dots + u_{10}$

الأجوبة:1: وبما أن (u_n) متتالية حسابية أساسها $r = 2$ وحدها

$$\text{الأول } u_0 = 3 \text{ فان : } u_n = u_0 + (n-0)r \text{ أي : } u_n = 3 + 2(n-0)$$

$$\text{أي : } u_n = 2n + 3$$

$$\text{ومنه : } u_1 = 5 \text{ و } u_{10} = 23$$

$$(2) S = u_1 + u_1 + \dots + u_{10} = (10-1+1) \frac{u_1 + u_{10}}{2}$$

$$S = 10 \frac{5 + 23}{2} = 10 \times \frac{28}{2} = 10 \times 14 = 140$$

تمرين 11: لتكن المتتالية الحسابية $(u_n)_{n \geq 1}$ الذي أساسها $r = 4$

$$\text{وحدها الأول } u_0 = -2$$

(1) أكتب u_n بدلالة n وحدد u_1 و u_6

(2) أحسب المجموع التالي : $S = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_6$

الأجوبة:1: وبما أن (u_n) متتالية حسابية أساسها $r = 4$

$$\text{وحدها الأول } u_0 = -2$$

$$\text{فان : } u_n = u_0 + (n-0)r \text{ أي : } u_n = -2 + 4(n-0)$$

$$\text{أي : } u_n = 4n - 2$$

$$\text{ومنه : } u_1 = 2 \text{ و } u_6 = 22$$

$$(2) S = u_1 + u_1 + \dots + u_6 = (6-1+1) \frac{u_1 + u_6}{2}$$

$$S = 6 \frac{2 + 22}{2} = 6 \times \frac{24}{2} = 6 \times 12 = 72$$

تمرين 12: نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n \geq 0}$ المعرفة بالصيغة

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = 2 \times 3^n$$

(1) أحسب الحدود الأربعة الأولى للمتتالية $(u_n)_{n \geq 0}$

$$(2) \text{ أحسب } \frac{u_{n+1}}{u_n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

الأجوبة:1: $u_0 = 2 \times 3^0 = 2 \times 1 = 2$ و $u_1 = 2 \times 3^1 = 6$ و $u_2 = 2 \times 3^2 = 18$ و

$$u_3 = 2 \times 3^3 = 54$$

$$(2) \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2 \times 3^{n+1}}{2 \times 3^n} = \frac{3^{n+1}}{3^n} = \frac{3^n \times 3^1}{3^n} = 3^1 = 3 = q$$

نقول أن المتتالية $(u_n)_{n \geq 0}$ هندسية أساسها $q = 3$

$$\text{وحدها الأول } u_0 = 2$$

تمرين 13: نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n \geq 0}$ بحيث:

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = 5 \times 3^{2n+1}$$

بين أن $(u_n)_{n \geq 0}$ متتالية هندسية وحدد أساسها q وحدها الأول

الأجوبة:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{5 \times 3^{2n+3}}{5 \times 3^{2n+1}} = \frac{3^{2n+3}}{3^{2n+1}} = 3^{(2n+3)-(2n+1)} = 3^2 = 9 = q$$

اذن: المتتالية $(u_n)_{n \geq 0}$ هندسية أساسها $q = 9$

$$\text{وحدها الأول } u_0 = 15$$

تمرين 14: نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = 3 \times \left(\frac{2}{5} \right)^n$$

بين أن (u_n) متتالية هندسية وحدد أساسها وحدها الأول

الأجوبة:

$$u_4 = 5 \times (2)^4 = 5 \times 16 = 80 \text{ و } u_2 = 81 \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{81}{9} = 9 \text{ و } u_1 = 81 \times \left(\frac{1}{3}\right)^1 = \frac{81}{3} = 27$$

$$u_2 = 81 \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{81}{9} = 9 \text{ و } u_1 = 81 \times \left(\frac{1}{3}\right)^1 = \frac{81}{3} = 27 (3)$$

$$n = 5 : \text{ ومنه } u_5 = 2 \times u_4 = 2 \times 80 = 160 \text{ و}$$

تمرين 18: نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n \geq 0}$ المعرفة

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_0 = 2 \text{ و } u_{n+1} = 3 \times u_n$$

1. تحقق أن $(u_n)_{n \geq 0}$ هندسية

2. عبر عن U_n بدلالة n

3. أحسب المجموع : $S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_5$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{3 \times u_n}{u_n} = 3 = q \text{ (الأجوبة: 1)}$$

اذن: المتتالية هندسية أساسها $q = 3$ وحدها الأول $u_0 = 3$

$$(2) \quad (u_n)_{n \geq 0} \text{ هندسية أساسها } q = 3 \text{ وحدها الأول } u_0 = 3$$

$$\text{اذن: } u_n = u_0 q^{n-0} = 3 \times (3)^n = 3^{n+1} \text{ أي: } u_n = 3 \times (3)^n = 3^{n+1}$$

$$S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_5 = u_1 \times \frac{1 - q^{5+1}}{1 - q} = u_1 \times \frac{1 - q^6}{1 - q} = 3 \times \frac{1 - 3^6}{1 - 3} = 3 \times \frac{1 - 729}{-2} = 3 \times \frac{-728}{-2} = 3 \times 364 = 1092$$

$$S_n = 9 \times \frac{1 - 3^5}{1 - 3} = 9 \times \frac{1 - 243}{-2} = 9 \times \frac{-242}{-2} = 9 \times 121 = 1089$$

تمرين 19: لتكن (u_n) متتالية هندسية بحيث : $u_5 = 486$

$$\text{و } u_7 = 4374 \text{ و أساسها } q > 0$$

$$(1) \text{ حدد أساس المتتالية } (u_n) \text{ (2) أحسب } u_0 \text{ و } u_{10}$$

$$(3) \text{ أكتب } u_n \text{ بدلالة } n \text{ (4) أحسب المجموع التالي: } S = u_0 + u_5 + \dots + u_{2009}$$

(الأجوبة: 1) (u_n) متتالية هندسية

$$\text{اذن: } u_7 = u_5 q^{7-5} = u_5 q^2 = 4374 \text{ يعني } q^2 = \frac{4374}{486} = 9 \text{ يعني } q = 3 \text{ أو } q = -3$$

$$\text{وحسب المعطيات: } q > 0 \text{ اذن: } q = 3$$

$$(2) \quad (u_n) \text{ متتالية هندسية اذن: } u_5 = u_0 q^{5-0} = u_0 q^5 \text{ يعني } 486 = u_0 3^5$$

$$\text{يعني } u_0 = \frac{486}{3^5} = \frac{486}{243} = 2$$

$$u_{10} = u_7 q^{10-7} = u_7 q^3 = 4374 \times 3^3 = 4374 \times 27 = 118098$$

$$u_{10} = 4374 \times 3^3 = 4374 \times 27 = 118098$$

$$(3) \quad u_n = 2 \times 3^n \text{ يعني } u_n = u_0 q^{n-0} = u_0 q^n$$

$$(4) \quad S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_{2009} = u_0 \times \frac{1 - q^{2009+1}}{1 - q} = u_0 \times \frac{1 - q^{2010}}{1 - q}$$

$$S_n = 2 \times \frac{1 - 3^{2010}}{1 - 3} = -\frac{1 - 3^{2010}}{2} = \frac{3^{2010} - 1}{2}$$

تمرين 20 للبحث: نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n \geq 0}$ المعرفة

بالصيغة التالية :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_0 = 3 \text{ و } u_{n+1} = 2 \times u_n$$

1. تحقق أن $(u_n)_{n \geq 0}$ هندسية

2. عبر عن U_n بدلالة n

3. أحسب المجموع : $S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_6$

$$\text{اذن: } \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{3 \times \left(\frac{2}{5}\right)^{n+1}}{3 \times \left(\frac{2}{5}\right)^n} = \frac{\left(\frac{2}{5}\right)^{n+1}}{\left(\frac{2}{5}\right)^n} = \left(\frac{2}{5}\right)^{(n+1)-n} = \left(\frac{2}{5}\right)^1 = \frac{2}{5} = q$$

المتتالية $(u_n)_{n \geq 0}$ هندسية أساسها $q = \frac{2}{5}$

$$\text{وحدها الأول } u_0 = 3 \times \left(\frac{2}{5}\right)^0 = 3 \times 1 = 3$$

تمرين 15: لتكن (u_n) متتالية هندسية بحيث : $u_5 = \frac{243}{2}$

$$\text{و } u_2 = \frac{9}{2} \text{ حدد } q \text{ أساس المتتالية } (u_n) \text{ و أكتب } u_n \text{ بدلالة } n$$

(الأجوبة: 1) لدينا (u_n) متتالية هندسية اذن : $u_n = u_m q^{n-m}$

$$\text{ومنه : اذن: } u_5 = u_2 q^{5-2} = u_2 q^3 = \frac{243}{2} \text{ يعني } q^3 = \frac{243}{9} = 27$$

$$\text{يعني } q^3 = \frac{243}{9} = 27 \text{ يعني } q = 3$$

$$\text{لدينا أيضا: } u_n = u_2 q^{n-2} = \frac{9}{2} \times 3^{n-2} = \frac{3^2 \times 3^{n-2}}{2} = \frac{3^{n-2+2}}{2} = \frac{3^n}{2} \text{ يعني } u_n = \frac{3^n}{2}$$

تمرين 16: نعتبر المتتالية الهندسية (u_n)

$$\text{بحيث حددها الأول } u_0 = 81 \text{ وأساسها } q = \frac{1}{3}$$

$$(1) \text{ أكتب } u_n \text{ بدلالة } n \text{ (2) أحسب } u_1 \text{ و } u_2 \text{ و } u_3$$

$$(3) \text{ حدد العدد الصحيح الطبيعي } n \text{ بحيث } u_n = 1$$

(الأجوبة: 1) نعلم أن $(u_n)_{n \geq 0}$ متتالية هندسية

$$\text{أساسها } q = \frac{1}{3} \text{ وحدها الأول } u_0 = 81$$

$$\text{اذن: } u_n = u_0 q^{n-0} = u_0 q^n \text{ ومنه: } u_n = 81 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

$$(2) \quad u_2 = 81 \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{81}{9} = 9 \text{ و } u_1 = 81 \times \left(\frac{1}{3}\right)^1 = \frac{81}{3} = 27$$

$$\text{و } u_3 = 81 \times \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{81}{27} = 3$$

$$(3) \quad u_n = 1 \text{ يعني } 81 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n = 1 \text{ يعني } 81 \times \frac{1}{3^n} = 1$$

$$\frac{81}{3^n} = 1 \text{ يعني } 81 = 3^n \text{ يعني } n = 4$$

تمرين 17: نعتبر المتتالية الهندسية (u_n) بحيث حددها الأول $u_0 = 5$

$$\text{و } u_3 = 40$$

1. تحقق أن أساس المتتالية (u_n) هو $q = 2$

2. أكتب u_n بدلالة n و أحسب u_4

$$3. \text{ حدد العدد الصحيح الطبيعي } n \text{ بحيث } u_n = 160$$

(الأجوبة: 1) نعلم أن $(u_n)_{n \geq 0}$ متتالية هندسية اذن :

$$\text{اذن: } u_3 = u_0 q^{3-0} = u_0 q^3 = 40 \text{ يعني } 40 = 5q^3 \text{ يعني } q^3 = \frac{40}{5} = 8$$

$$\text{يعني } q^3 = 8 \text{ يعني } q = 2$$

$$(2) \quad u_n = 5 \times (2)^n$$