

الأستاذ:
نجيب
عثماني

الدرس الرابع :

المتتاليات العددية

أكاديمية
الجهة
الشرقية

مستوى: السنة الأولى من سلك البكالوريا

- **شعبة التعليم الأصيل: مسلك العلوم الشرعية و مسلك اللغة العربية**
 - **شعبة الآداب و العلوم الإنسانية: مسلك الآداب و مسلك العلوم الإنسانية**
- محتوى الدرس و الأهداف القدرات المنتظرة من الدرس و التعليمات الرسمية**

المتتاليات العددية؛ المتتاليات الحسابية؛ المتتاليات الهندسية	– التعرف على متتالية حسابية أو هندسية وتحديد أساسها وحدها الأول؛ – حساب الحد العام لمتتالية هندسية أو لمتتالية حسابية؛ – حساب مجموع n حدا متتابعة من متتالية حسابية أو متتالية هندسية؛ – استعمال المتتاليات الحسابية و المتتاليات الهندسية في حل مسائل متنوعة.	– يتم تقديم مفهوم المتتاليات من خلال وضعيات مناسبة – يعتبر أي بناء نظري لمفهوم المتتالية خارج المقرر؛ – يشكل درس المتتاليات فرصة لتعويد التلاميذ على استعمال الأدوات المعلوماتية.
---	--	--

1. المتتاليات الحسابية

نشاط 1: لاحظ ثم أتمم بأربعة أعداد ملائمة لتسلسل كل متتالية من المتتاليات التالية :

(1) 0, 2, 4, 6, 8, 10,

(2) 6, 3, 0, -3, -6, -9, -12,

(3) 1, 3, 9, 27, 81, 243,

(4) 1, 1/2, 1/4, 1/8, 1/16, 1/32,

1, 4, 9, 16, 25, 36,

ليكن I هو $\mathbb{N}$ أو جزء من $\mathbb{N}$

نشاط 2: نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n \geq 0}$ المعرفة بالصيغة الصريحة

التالية : $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = 2n + 3$

1. أحسب حدها الأول u_0

2. أحسب الحدود الأربعة الأولى للمتتالية $(u_n)_{n \geq 0}$

الجواب : $u_0 = 2 \times 0 + 3 = 3$ و $u_1 = 2 \times 1 + 3 = 5$

$u_2 = 2 \times 2 + 3 = 4 + 3 = 7$ و $u_3 = 2 \times 3 + 3 = 9$

نلاحظ أن أن فرق حدين متتالين هو العدد 2

1. تعريف :

نقول إن $(u_n)_{n \in I}$ متتالية حسابية إذا وجد عدد حقيقي r بحيث :

$\forall n \geq n_0 \quad u_{n+1} = u_n + r$

العدد الحقيقي r يسمى أساس المتتالية $(u_n)_{n \geq n_0}$

مثال: نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n \geq 0}$ المعرفة بالصيغة الصريحة التالية :

$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = 2n - 1$

1. أحسب حدها الأول u_0

2. أحسب الحدود الأربعة الأولى للمتتالية $(u_n)_{n \geq 1}$

3. أحسب $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} - u_n$

الجواب : $u_0 = 2 \times 0 - 1 = 0 - 1 = -1$

$u_1 = 2 \times 1 - 1 = 2 - 1 = 1$

$$u_2 = 2 \times 2 - 1 = 4 - 1 = 3$$

$$u_3 = 2 \times 3 - 1 = 6 - 1 = 5$$

نلاحظ أن أن فرق حدين متتالين هو العدد 2

$$u_{n+1} - u_n = (2(n+1) - 1) - (2n - 1) = (2n + 2 - 1) - (2n - 1)$$

$$= (2n + 2 - 1) - (2n - 1) = (2n + 1) - (2n - 1) = 2n + 1 - 2n + 1 = 2$$

$$u_{n+1} - u_n = 2 = r$$

ومنه المتتالية $(u_n)_{n \geq 0}$ هي حسابية أساسها : $r = 2$

تمرين 1: نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة كالتالي :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = 2n + 3$$

1. أحسب $u_{n+1} - u_n$

2. ماذا تستنتج ؟

تمرين 2: نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة كالتالي : $u_n = \frac{n+3}{4}$

$$\forall n \in \mathbb{N}$$

بين أن المتتالية (u_n) حسابية وحدد أساسها وحدها الأول

$$u_{n+1} - u_n = \frac{(n+1)+3}{4} - \frac{n+3}{4} = \frac{1}{4} = r : \text{ الجواب}$$

ومنه المتتالية $(u_n)_{n \in I}$ هي حسابية أساسها $\frac{1}{4} = r$

$$\text{وحدها الأول : } u_0 = \frac{3}{4}$$

1. صيغة الحد العام للمتتالية بدلالة n :

إذا كانت (u_n) متتالية حسابية أساسها r وحدها الأول u_0

$$\text{فان : } u_n = u_0 + nr$$

نتيجة : إذا كانت $(u_n)_{n \geq n_0}$ متتالية حسابية أساسها r

فان : $u_n = u_p + (n - p)r$ لكل $n \geq n_0$ و $p \geq n_0$

تمرين 3: لتكن (u_n) متتالية حسابية أساسها $r = \frac{1}{2}$ و $u_6 = 31$

(1) أحسب u_0 (2) أكتب u_n بدلالة n (3) أحسب : u_{2015} ثم u_{2016}

أجوبة: (1) لدينا (u_n) حسابية اذن : $u_n = u_0 + nr$

ومنه : $28 = u_0$ يعني $31 = u_0 + 3$ يعني $u_6 = u_0 + 6 \times \frac{1}{2}$

(2) $u_n = 28 + \frac{n}{2}$ يعني $u_n = u_0 + nr$

(3) $u_{2015} = 28 + \frac{2015}{2} = \frac{2071}{2}$

و $u_{2016} = 28 + \frac{2016}{2} = 28 + 1008 = 1036$

تمرين 4: لتكن (u_n) متتالية حسابية أساسها r و بحيث $u_0 = 5$

و $u_{100} = -45$

(1) حدد r (2) أحسب : u_{2015} و u_{2016}

أجوبة: (1) لدينا (u_n) حسابية اذن : $u_n = u_0 + nr$

ومنه : $u_{100} = u_0 + 100r$ يعني $-45 = 5 + 100r$ يعني $-50 = 100r$ يعني

$r = -\frac{1}{2}$

(2) (u_n) حسابية اذن : $u_n = u_0 + nr$ يعني $u_{2015} = 5 + 2015 \times \left(-\frac{1}{2}\right)$

يعني $u_{2015} = 5 - \frac{2015}{2} = \frac{10 - 2015}{2} = \frac{-2005}{2}$

ومنه $u_{2016} = \frac{-2005}{2} + \frac{-1}{2} = \frac{-2006}{2} = -1003$

2. مجموع حدود متتالية حسابية :

لتكن $(u_n)_{n \in \mathbb{I}}$ متتالية حسابية

نضع $S_n = u_p + u_{p+1} + u_{p+2} + \dots + u_n$ حيث $n > p \geq n_0$

لدينا $S_n = (n - p + 1) \left(\frac{u_n + u_p}{2} \right)$

المجموع $S_n = u_p + u_{p+1} + u_{p+2} + \dots + u_n$ يحتوي على

$(n - p + 1)$ حد

مثال: لتكن المتتالية الحسابية $(u_n)_{n \geq 1}$ الذي أساسها $r = 3$ وحدها

الأول $u_0 = 5$

(1) أكتب u_n بدلالة n وحدد u_8 و u_{13}

(2) أحسب المجموع التالي : $S = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_{13}$

أجوبة: (1) وبما أن (u_n) متتالية حسابية أساسها $r = 3$ وحدها

الأول $u_0 = 5$

فان : $u_n = u_0 + (n - 0)r$ أي : $u_n = 5 + 3(n - 0)$ أي : $u_n = 3n + 5$

ومنه : $u_8 = 3 \times 8 + 5 = 29$

(2) $S = u_0 + u_1 + \dots + u_{13} = (13 - 0 + 1) \frac{u_0 + u_{13}}{2}$

$u_{13} = 3 \times 13 + 5 = 44$ ومنه نحسب : $S = 14 \frac{u_0 + u_{13}}{2} = \frac{14}{2} (5 + 44)$

وبالتالي : $S = 7(5 + 44) = 7 \times 49 = 343$

تمرين 5:

1. لتكن (u_n) متتالية حسابية أساسها $r = \frac{1}{2}$ وحدها الأول $u_0 = 1$

أحسب المجموع التالي : $S_1 = u_3 + u_4 + u_5 + \dots + u_{30}$

2. لتكن (u_n) متتالية حسابية أساسها $r = -2$ وحدها الأول $u_0 = 4$

أحسب المجموع التالي : $S_2 = u_7 + u_8 + u_9 + \dots + u_{25}$

الجواب (1) : $S_1 = u_3 + u_4 + u_5 + \dots + u_{30} = (30 - 3 + 1) \frac{u_3 + u_{30}}{2}$

$S_1 = (28) \frac{u_3 + u_{30}}{2}$

وبما أن (u_n) متتالية حسابية أساسها $r = \frac{1}{2}$ وحدها الأول $u_0 = 1$

فان : $u_n = u_0 + (n - 0)r$

أي : $u_n = 1 + \frac{n}{2}$ أي : $u_n = 1 + (n - 0) \frac{1}{2}$

ومنه نحسب : $u_3 = 1 + \frac{3}{2} = \frac{5}{2}$ و : $u_{30} = 1 + \frac{30}{2} = \frac{32}{2} = 16$

وبالتالي : $S_1 = (28) \frac{u_3 + u_{30}}{2} = 14 \left(\frac{5}{2} + 16 \right) = 14 \left(\frac{37}{2} \right) = 7 \times 37 = 259$

(2) $S_2 = u_7 + u_8 + u_9 + \dots + u_{25} = (25 - 7 + 1) \frac{u_7 + u_{25}}{2} = (19) \frac{u_7 + u_{25}}{2}$

وبما أن (u_n) متتالية حسابية أساسها $r = -2$ وحدها الأول

$u_0 = 4$ فان : $u_n = u_0 + (n - 0)r$

أي : $u_n = 4 - 2n$ أي : $u_n = 4 + (n - 0)(-2)$

نحسب : $u_7 = 4 - 2 \times 7 = 4 - 14 = -10$

و $u_{25} = 4 - 2 \times 25 = 4 - 50 = -46$

وبالتالي : $S_2 = (19) \frac{u_7 + u_{25}}{2} = (19) \frac{-10 - 46}{2} = (19) \frac{-56}{2} = 19 \times -28 = -532$

تمرين 6: لتكن المتتالية الحسابية $(u_n)_{n \geq 1}$ الذي أساسها $r = 2$ وحدها

الأول $u_0 = 3$

(1) أكتب u_n بدلالة n وحدد u_1 و u_{10}

(2) أحسب المجموع التالي : $S = u_1 + u_1 + u_2 + \dots + u_{10}$

أجوبة: (1) وبما أن (u_n) متتالية حسابية أساسها $r = 2$ وحدها

الأول $u_0 = 3$

فان : $u_n = u_0 + (n - 0)r$ أي : $u_n = 3 + 2(n - 0)$ أي : $u_n = 2n + 3$

ومنه : $u_1 = 5$ و $u_{10} = 23$

(2) $S = u_1 + u_1 + \dots + u_{10} = (10 - 1 + 1) \frac{u_1 + u_{10}}{2}$

$S = 10 \frac{5 + 23}{2} = 10 \times \frac{28}{2} = 10 \times 14 = 140$

تمرين 7: لتكن المتتالية الحسابية $(u_n)_{n \geq 1}$ الذي أساسها $r = 4$ وحدها

الأول $u_0 = -2$

(1) أكتب u_n بدلالة n وحدد u_1 و u_6

(2) أحسب المجموع التالي : $S = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_6$

أجوبة: (1) وبما أن (u_n) متتالية حسابية أساسها $r = 4$ وحدها

الأول $u_0 = -2$

فان : $u_n = u_0 + (n - 0)r$ أي : $u_n = -2 + 4(n - 0)$ أي :

$u_n = 4n - 2$

ومنه : $u_1 = 2$ و $u_6 = 22$

(2) $S = u_1 + u_1 + \dots + u_6 = (6 - 1 + 1) \frac{u_1 + u_6}{2}$

$S = 6 \frac{2 + 22}{2} = 6 \times \frac{24}{2} = 6 \times 12 = 72$

II. المتتاليات الهندسية

نشاط 1: لاحظ ثم أتمم بأربعة أعداد ملائمة لتسلسل كل متتالية من المتتاليات التالية :

$$1. 1, 3, 9, 27, 81, 243, \dots$$

$$2. 1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \frac{1}{16}, -\frac{1}{32}, \dots$$

نشاط 2: نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n \geq 0}$ المعرفة بالصيغة الصريحة

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = 2 \times 3^n$$

1. أحسب الحدود الأربعة الأولى للمتتالية $(u_n)_{n \geq 0}$

$$2. \text{ أحسب } \frac{u_{n+1}}{u_n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

(الجواب: 1)

$$u_0 = 2 \times 3^0 = 2 \times 1 = 2 \quad u_1 = 2 \times 3^1 = 6 \quad u_2 = 2 \times 3^2 = 18 \quad u_3 = 2 \times 3^3 = 54$$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2 \times 3^{n+1}}{2 \times 3^n} = \frac{3^{n+1}}{3^n} = \frac{3^n \times 3^1}{3^n} = 3^1 = 3 = q \quad (2)$$

نقول أن المتتالية $(u_n)_{n \geq 0}$ هندسية أساسها $q = 3$ وحدها الأول $u_0 = 2$

1. تعريف:

نقول إن $(u_n)_{n \in I}$ متتالية هندسية إذا وجد عدد حقيقي q

$$\text{بحيث: } \forall n \geq n_0 \quad u_{n+1} = q u_n$$

العدد الحقيقي q يسمى أساس المتتالية $(u_n)_{n \geq 0}$

تمرين 8: نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n \geq 0}$ بحيث: $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = 5 \times 3^{2n+1}$

بين أن $(u_n)_{n \geq 0}$ متتالية هندسية و حدد أساسها q وحدها الأول

$$\text{الجواب: } q = 9 \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{5 \times 3^{2n+3}}{5 \times 3^{2n+1}} = \frac{3^{2n+3}}{3^{2n+1}} = 3^{(2n+3)-(2n+1)} = 3^2 = 9 = q$$

اذن: المتتالية $(u_n)_{n \geq 0}$ هندسية أساسها $q = 9$ وحدها الأول $u_0 = 15$

تمرين 9: نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة كالتالي :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = 3 \times \left(\frac{2}{5}\right)^n$$

بين أن (u_n) متتالية هندسية و حدد أساسها وحدها الأول

2. صيغة الحد العام للمتتالية بدلالة n :

إذا كانت (u_n) متتالية هندسية أساسها q غير منعدم وحدها الأول u_{n_0} فان :

$$u_n = u_{n_0} q^{n-n_0}$$

نتيجة : إذا كانت $(u_n)_{n \geq n_0}$ متتالية هندسية أساسها q غير منعدم فان :

$$u_n = u_m q^{n-m} \quad \text{لكل } n \geq n_0 \text{ و } m \geq n_0$$

تمرين 10: لتكن (u_n) متتالية هندسية بحيث : $u_5 = \frac{243}{2}$ و $u_2 = \frac{9}{2}$

حدد q أساس المتتالية (u_n) و أكتب u_n بدلالة n

الجواب : لدينا (u_n) متتالية هندسية اذن : $u_n = u_m q^{n-m}$

$$\text{ومنه : اذن: } u_5 = u_2 q^{5-2} \text{ يعني: } \frac{243}{2} = \frac{9}{2} q^3$$

$$\text{يعني } q^3 = \frac{243}{9} \text{ يعني: } q^3 = 27 \text{ يعني: } q = 3$$

$$\text{لدينا أيضا: } u_n = u_2 q^{n-2} \text{ يعني: } u_n = \frac{9}{2} 3^{n-2} = \frac{3^2 \times 3^{n-2}}{2} = \frac{3^{n-2+2}}{2} = \frac{3^n}{2}$$

تمرين 11: نعتبر المتتالية الهندسية (u_n) بحيث حدها الأول $u_0 = 81$

و أساسها : $q = \frac{1}{3}$

(1) أكتب u_n بدلالة n (2) أحسب u_1 و u_2 و u_3

(3) حدد العدد الصحيح الطبيعي n بحيث $u_n = 1$

(الأجوبة: 1) نعلم أن $(u_n)_{n \geq 0}$ متتالية هندسية

$$\text{أساسها } q = \frac{1}{3} \text{ وحدها الأول } u_0 = 81$$

$$\text{اذن: } u_n = u_0 q^{n-0} \text{ ومنه: } u_n = 81 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

$$(2) \quad u_2 = 81 \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{81}{9} = 9 \text{ و } u_1 = 81 \times \left(\frac{1}{3}\right)^1 = \frac{81}{3} = 27$$

$$\text{و } u_3 = 81 \times \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{81}{27} = 3$$

$$(3) \quad u_n = 1 \text{ يعني } 81 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n = 1 \text{ يعني } \frac{81}{3^n} = 1 \text{ يعني } 81 \times \frac{1}{3^n} = 1$$

$$\frac{81}{3^n} = 1 \text{ يعني } 81 = 3^n \text{ يعني } n = 4$$

تمرين 12: نعتبر المتتالية الهندسية (u_n) بحيث حدها الأول $u_0 = 5$

$$\text{و } u_3 = 40$$

1. تحقق أن أساس المتتالية (u_n) هو $q = 2$

2. أكتب u_n بدلالة n و أحسب u_4

3. حدد العدد الصحيح الطبيعي n بحيث $u_n = 160$

(الأجوبة: 1) نعلم أن $(u_n)_{n \geq 0}$ متتالية هندسية اذن :

$$\text{اذن: } u_3 = u_0 q^{3-0} \text{ يعني: } 40 = 5q^3 \text{ يعني: } q^3 = \frac{40}{5} \text{ يعني: } q^3 = 8$$

$$q^3 = 8 \text{ يعني: } q = 2$$

$$(2) \quad u_n = 5 \times (2)^n$$

$$u_4 = 5 \times (2)^4 = 5 \times 16 = 80 \text{ و } u_2 = 81 \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{81}{9} = 9 \text{ و } u_1 = 81 \times \left(\frac{1}{3}\right)^1 = \frac{81}{3} = 27$$

$$(3) \quad u_2 = 81 \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{81}{9} = 9 \text{ و } u_1 = 81 \times \left(\frac{1}{3}\right)^1 = \frac{81}{3} = 27$$

$$\text{و } u_5 = 2 \times u_4 = 2 \times 80 = 160 \text{ ومنه: } n = 5$$

3. مجموع حدود متتابعة لمتتالية هندسية :

لتكن $(u_n)_{n \in I}$ متتالية هندسية أساسها q غير منعدم نضع

$$S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n$$

$$\text{إذا كان } q \neq 1 \text{ فان: } S_n = u_0 \left(\frac{1-q^{n+1}}{1-q} \right)$$

مثال: نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n \geq 0}$ المعرفة بالصيغة التالية :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_0 = 2 \text{ و } u_{n+1} = 3 \times u_n$$

1. تحقق أن $(u_n)_{n \geq 0}$ هندسية

2. عبر عن U_n بدلالة n

3. أحسب المجموع : $S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_5$

$$\text{الجواب (1): } \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{3 \times u_n}{u_n} = 3 = q$$

اذن: المتتالية هندسية أساسها $q = 3$ وحدها الأول $u_0 = 3$

$$(2) \quad u_n = 3 \times (3)^n = 3^1 \times (3)^n = (3)^{n+1} \text{ أي: } u_n = u_0 q^{n-0}$$

$$(3) \quad S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_5 = u_1 \times \frac{1-q^{5-1+1}}{1-q} = u_1 \times \frac{1-q^5}{1-q}$$

$$u_1 = 3^{1+1} = 3^2 = 9$$

$$S_n = 9 \times \frac{1-3^5}{1-3} = 9 \times \frac{1-3^5}{-2} = 9 \times \frac{1-243}{-2} = 9 \times \frac{-242}{-2} = 1029$$

تمرين 13: لتكن (u_n) متتالية هندسية بحيث : $u_5 = 486$

و $u_7 = 4374$ و أساسها $q > 0$

(1) حدد أساس المتتالية (u_n) (2) أحسب u_{10} و

(3) أكتب u_n بدلالة n (4) أحسب المجموع التالي : $S = u_0 + u_5 + \dots + u_{2009}$

أجوبة : (u_n) متتالية هندسية اذن : $u_7 = u_5 q^{7-5}$ يعني : $q^2 = \frac{4374}{486} = 9$

يعني : $q = 3$ أو $q = -3$ وحسب المعطيات : $q > 0$

اذن : $q = 3$

(2) (u_n) متتالية هندسية اذن : $u_5 = u_0 q^{5-0}$ يعني $486 = u_0 3^5$

$$u_0 = \frac{486}{3^5} = \frac{486}{243} = 2 \text{ يعني}$$

$$u_{10} = u_7 q^{10-7} \text{ يعني } u_{10} = u_7 q^3 \text{ يعني } u_{10} = 4374 \times 3^3 = 4374 \times 27 = 118098$$

(3) $u_n = u_0 q^{n-0}$ يعني $u_n = 2 \times 3^n$

$$S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_{2009} = u_0 \times \frac{1-q^{2009-0+1}}{1-q} = u_0 \times \frac{1-q^{2010}}{1-q} \quad (4)$$

$$S_n = 2 \times \frac{1-3^{2010}}{1-3} = -\left(1-3^{2010}\right) = 3^{2010} - 1$$

تمرين 14: نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n \geq 0}$ المعرفة بالصيغة التالية :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_0 = 3 \text{ و } u_{n+1} = 2 \times U_n$$

1. تحقق أن $(u_n)_{n \geq 0}$ هندسية

2. أعبّر عن U_n بدلالة n

3. أحسب المجموع : $S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_6$