

تمارين تطبيقية مصاحبة للدرس 4 مع حلولها

تمرين 1

نعتبر الدالة العددية f المعرفة بما يلي :

$$f(x) = -x^2 + 1$$

بين أن الدالة f مكبورة بالعدد 1 على $\mathbb{R}$.

حل التمرين 1

لنبين أن الدالة f مكبورة بالعدد 1 على $\mathbb{R}$.

لدينا : لكل x من $\mathbb{R}$:

$$f(x) - 1 = (-x^2 + 1) - 1$$

$$f(x) - 1 = -x^2 + 1 - 1$$

$$f(x) - 1 = -x^2$$

ونعلم أن $x^2 \geq 0$ لكل x من $\mathbb{R}$.

إذن : $-x^2 \leq 0$ لكل x من $\mathbb{R}$.

ومنه : $f(x) - 1 \leq 0$

ومنه المطلوب : $f(x) \leq 1$

تمرين 2

نعتبر الدالة العددية f المعرفة كما يلي :

$$f(x) = -x^2 - 2x + 3$$

1 - تحقق أن مهما يكن x من $\mathbb{R}$.

$$f(x) = (x - 1)^2 + 2$$

2 - استنتج أن الدالة f مصغورة بالعدد 2 على

$\mathbb{R}$.

حل التمرين 2

1 - لنتحقق من المتساوية.

لكل x من $\mathbb{R}$ لدينا :

$$(x - 1)^2 + 2 = x^2 - 2x + 1 + 2$$

$$(x - 1)^2 + 2 = x^2 - 2x + 3$$

$$(x - 1)^2 + 2 = f(x) \quad \text{إذن :}$$

$$f(x) = (x - 1)^2 + 2 \quad \text{إذن :}$$

2 - لنبين أن f مصغورة بالعدد 2 على $\mathbb{R}$

لكل x من $\mathbb{R}$ لدينا :

$$f(x) - 2 = (x - 1)^2 + 2 - 2$$

$$f(x) - 2 = (x - 1)^2$$

ونعلم أن : $(x - 1)^2 \geq 0$ $(\forall x \in \mathbb{R})$

$$f(x) - 2 \geq 0 \quad \text{إذن :}$$

$$f(x) \geq 2 \quad \text{ومنه :}$$

تمرين 3

نعتبر الدالة العددية f المعرفة كما يلي :

$$f(x) = x^2 + x$$

1 - ليكن x و y من $\mathbb{R}$.

بين أن : $f(x) - f(y) = (x - y)(x + y + 1)$

2 - استنتج أن f تناقصية على المجال $]-\infty, -\frac{1}{2}]$

وتزايدية على المجال $[-\frac{1}{2}, +\infty[$.

3 - اعط جدول تغيرات f .

حل التمرين 3

1 - ليكن x و y من $\mathbb{R}$.

$$f(x) - f(y) = (x^2 + x) - (y^2 + y)$$

$$= x^2 + x - y^2 - y$$

$$= x^2 - y^2 + x - y$$

$$= (x - y)(x + y) + (x - y)$$

$$= (x - y)(x + y + 1)$$

$$f(x) - f(y) = (x - y)(x + y + 1) \quad \text{إذن :}$$

تمرين 5

1 - تحقق من أن : لكل x من $\mathbb{R}$:

$$x^3 - 3x + 2 = (x - 1)^2(x + 2)$$

2 - أدرس إشارة $x^3 - 3x + 2$

3 - نعتبر الدالتين f و g المعرفتين كما يلي :

$$f(x) = x^2 - 3$$

$$g(x) = \frac{-2}{x}$$

أ - بين أن لكل x من $\mathbb{R}^*$:

$$f(x) - g(x) = \frac{x^3 - 3x + 2}{x}$$

ب - استنتج مقارنة للدالتين f و g على $\mathbb{R}^*$:

حل التمرين 5

1 - التحقق من المتساوية :

$$\begin{aligned} (x - 1)^2(x + 2) &= (x^2 - 2x + 1)(x + 2) \\ &= x^3 + 2x^2 - 2x^2 - 4x + x + 2 \\ &= x^3 - 3x + 2 \end{aligned}$$

2 - إشارة $x^3 - 3x + 2$

$$x^3 - 3x + 2 = (x - 1)^2(x + 2)$$

وإشارة $x^3 - 3x + 2$ تلخص في الجدول كما يلي :

x	$-\infty$	-2	1	$+\infty$
$(x - 1)^2$	+	+	+	+
$x + 2$	-	0	+	+
$x^3 - 3x + 2$	-	0	+	+

3 - أ - لكل x من $\mathbb{R}^*$ لدينا :

$$\begin{aligned} f(x) - g(x) &= x^2 - 3 - \left(\frac{-2}{x}\right) \\ &= x^2 - 3 + \frac{2}{x} \\ &= \frac{x^3 - 3x + 2}{x} \end{aligned}$$

x	$-\infty$	-2	0	1	$+\infty$
$x^3 - 3x + 2$	-	0	+	+	+
x	-	-	0	+	+
$f(x) - g(x)$	-	0	-	+	+

وبالتالي نستنتج المقارنة المطلوبة.

2 - • على المجال $]-\infty, -\frac{1}{2}]$ لدينا :

$$\begin{cases} x + y \leq \frac{-1}{2} - \frac{1}{2} \\ x + y \leq -1 \end{cases} \quad \text{و منه : } \begin{cases} x \leq \frac{-1}{2} \\ y \leq \frac{-1}{2} \end{cases}$$

$$\boxed{x + y + 1 \leq 0} \quad \text{إذن :}$$

ومنه : إذا كان $x \geq y$ فإن $x - y \geq 0$

$$x + y + 1 \leq 0$$

$$(x - y)(x + y + 1) \leq 0$$

$$f(x) \leq f(y)$$

وهذا يعني أن f تناقصية على $]-\infty, -\frac{1}{2}]$.

• على المجال $[-\frac{1}{2}, +\infty[$:

$$\begin{cases} x + y \geq \frac{-1}{2} + \left(-\frac{1}{2}\right) \\ x + y \geq -1 \end{cases} \quad \text{و منه : } \begin{cases} x \geq \frac{-1}{2} \\ y \geq \frac{-1}{2} \end{cases}$$

$$\boxed{x + y + 1 \geq 0} \quad \text{إذن :}$$

إذا كان $x \geq y$ فإن $x - y \geq 0$

$$(x - y)(x + y + 1) \geq 0$$

إذن f تزايدية على $[-\frac{1}{2}, +\infty[$.

3 - جدول تغيرات f :

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	$+\infty$
$f(x)$		$\frac{-1}{4}$	

$$\begin{aligned} f\left(\frac{-1}{2}\right) &= \left(\frac{-1}{2}\right)^2 + \left(\frac{-1}{2}\right) \\ f\left(\frac{-1}{2}\right) &= \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = \frac{1 - 2}{4} = \frac{-1}{4} \end{aligned}$$