

الأستاذ:
نجيب
عثماني

تمارين محلولة: عموميات حول الدوال العددية
السنة الأولى من سلك البكالوريا مسك الآداب
والعلوم الانسانية

أكاديمية
الجهة
الشرقية

تمرين 1:

حدد مجموعة تعريف الدوال التالية:

$$g(x) = \frac{x^3}{2x-4} \quad (2) \quad f(x) = 3x^2 - x + 1$$

$$m(x) = \sqrt{2x-4} \quad (4) \quad h(x) = \frac{5x+10}{x^2-9} \quad (3)$$

الأجوبة: (1) $f(x) = 3x^2 - x + 1$

يعني $D_f = \mathbb{R}$ لأنها دالة حدودية

$$D_g = \{x \in \mathbb{R} / 2x-4 \neq 0\} \text{ يعني } g(x) = \frac{x^3}{2x-4} \quad (2)$$

$$D_g = \mathbb{R} - \{2\} \text{ ومنه } x=2 \text{ يعني } 2x=4 \text{ يعني } 2x-4=0$$

$$D_h = \{x \in \mathbb{R} / x^2-9 \neq 0\} \text{ يعني } h(x) = \frac{5x+10}{x^2-9} \quad (3)$$

$$(x-3)(x+3)=0 \text{ يعني } x^2-3^2=0 \text{ يعني } x^2-9=0$$

$$\text{يعني } x+3=0 \text{ أو } x-3=0 \text{ يعني } x=-3 \text{ أو } x=3$$

$$\text{ومنه } D_h = \mathbb{R} - \{-3; 3\}$$

$$D_m = \{x \in \mathbb{R} / 2x-4 \geq 0\} \text{ يعني } m(x) = \sqrt{2x-4} \quad (4)$$

$$D_m = [2; +\infty[\text{ منه } x \geq 2 \text{ يعني } 2x \geq 4 \text{ يعني } 2x-4 \geq 0$$

تمرين 2: حدد مجموعة تعريف الدالة f في الحالات التالية:

$$f(x) = \frac{x^2+x-1}{4x-12} \quad (2) \quad f(x) = x^3 - 3x^2 - 5x + 10 \quad (1)$$

$$f(x) = \frac{7x-1}{x^3-2x} \quad (4) \quad f(x) = \frac{x+10}{4x^2-1} \quad (3)$$

$$f(x) = \sqrt{-3x+6} \quad (6) \quad f(x) = \frac{x-5}{2x^2-5x-3} \quad (5)$$

الأجوبة: (1) $f(x) = x^3 - 3x^2 - 5x + 10$

يعني $D_f = \mathbb{R}$ لأنها دالة حدودية

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} / 4x-12 \neq 0\} \text{ يعني } f(x) = \frac{x^2+x-1}{4x-12} \quad (2)$$

$$D_f = \mathbb{R} - \{3\} \text{ ومنه } x=3 \text{ يعني } 4x=12 \text{ يعني } 4x-12=0$$

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} / 4x^2-1 \neq 0\} \text{ يعني } f(x) = \frac{x+10}{4x^2-1} \quad (3)$$

$$(2x-1)(2x+1)=0 \text{ يعني } (2x)^2-1^2=0 \text{ يعني } 4x^2-1=0$$

$$\text{يعني } 2x-1=0 \text{ أو } 2x+1=0 \text{ يعني } x=\frac{1}{2} \text{ أو } x=-\frac{1}{2} \text{ ومنه}$$

$$D_f = \mathbb{R} - \left\{-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right\}$$

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} / x^3-2x \neq 0\} \text{ يعني } f(x) = \frac{7x-1}{x^3-2x} \quad (4)$$

$$x=0 \text{ أو } x^2-2=0 \text{ يعني } x(x^2-2)=0 \text{ يعني } x^3-2x=0$$

$$\text{يعني } x^2=2 \text{ أو } x=0 \text{ يعني } x=\sqrt{2} \text{ أو } x=-\sqrt{2} \text{ أو } x=0$$

$$\text{ومنه } D_f = \mathbb{R} - \{-\sqrt{2}; 0; \sqrt{2}\}$$

$$f(x) = \frac{x-5}{2x^2-5x-3} \quad (5)$$

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} / 2x^2-5x-3 \neq 0\} \text{ يعني}$$

$$\text{نحل المعادلة باستعمال المميز} \quad 2x^2-5x-3=0$$

$$c=-3 \text{ و } b=-5 \text{ و } a=2$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4 \times 2 \times (-3) = 25 + 24 = 49 = (7)^2 > 0$$

بما أن $\Delta > 0$ فإن هذه المعادلة تقبل حلين هما:

$$x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \text{ و } x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x_2 = \frac{(-5)-\sqrt{49}}{2 \times 2} = \frac{5-7}{4} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2} \text{ و } x_1 = \frac{-(-5)+\sqrt{49}}{2 \times 2} = \frac{7+5}{4} = \frac{12}{4} = 3$$

$$\text{ومنه: } D_f = \mathbb{R} - \left\{-\frac{1}{2}; 3\right\}$$

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} / -3x+6 \geq 0\} \text{ يعني } f(x) = \sqrt{-3x+6} \quad (6)$$

$$D_m =]-\infty; 2] \text{ ومنه } x \leq 2 \text{ يعني } -3x \geq -6 \text{ يعني } -3x+6 \geq 0$$

تمرين 3: أدرس زوجية الدالة f في الحالات التالية:

$$f(x) = 2x^5 - 3x \quad (3) \quad f(x) = \frac{4}{x} \quad (2) \quad f(x) = 3x^2 \quad (1)$$

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2-4} \quad (5) \quad f(x) = \frac{x^4-2}{2x^2-1} \quad (4)$$

الأجوبة: (1) $f(x) = 3x^2$

$D_f = \mathbb{R}$ لأنها دالة حدودية

(أ) لكل x من $\mathbb{R}$ لدينا: $-x$ تنتمي إلى $\mathbb{R}$.

$$(ب) \text{ ومنه } f \text{ دالة زوجية} \quad f(-x) = 3(-x)^2 = 3x^2 = f(x)$$

$$D_f = \mathbb{R}^* = \mathbb{R} - \{0\} \quad f(x) = \frac{4}{x} \quad (2)$$

(أ) لكل x من $\mathbb{R}^*$ لدينا: $-x$ تنتمي إلى $\mathbb{R}^*$.

$$(ب) \text{ ومنه } f \text{ دالة فردية} \quad f(-x) = \frac{4}{-x} = -\frac{4}{x} = -f(x)$$

$$f(x) = 2x^5 - 3x \quad (3)$$

$D_f = \mathbb{R}$ لأنها دالة حدودية

(أ) لكل x من $\mathbb{R}$ لدينا: $-x$ تنتمي إلى $\mathbb{R}$.

$$(ب) \quad f(-x) = 2(-x)^5 - 3(-x)$$

$$f(-x) = -2x^5 - 3(-x) = -(2x^5 - 3x) = -f(x)$$

ومنه f دالة فردية

$$f(x) = \frac{x^4-2}{2x^2-1} \quad (4) \text{ نحدد أولامجموعة التعريف}$$

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} / 2x^2-1 \neq 0\}$$

$$(\sqrt{2}x-1)(\sqrt{2}x+1)=0 \text{ يعني } (\sqrt{2}x)^2-1^2=0 \text{ يعني } 2x^2-1=0$$

الأجوبة: (1)

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} / x^2 + 1 \neq 0\}$$

وهذه المعادلة ليس لها حل في $\mathbb{R}$

$$D_f = \mathbb{R}$$

(2) نعلم أن: $\forall x \in \mathbb{R} \quad x^2 \geq 0$

اذن: $x^2 + 1 \geq 0 + 1$ يعني $x^2 + 1 \geq 1$

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) \leq 1 \Leftrightarrow \frac{1}{x^2 + 1} \leq 1$$

نقول f دالة مكبورة على $\mathbb{R}$ بالعدد 1

سؤال: هل الدالة f مكبورة على $\mathbb{R}$ بالعدد 2؟ نعم

(3) نعلم أن: $\forall x \in \mathbb{R} \quad x^2 \geq 0$

اذن: $x^2 + 1 \geq 0 + 1$ يعني $x^2 + 1 \geq 1$

يعني $\forall x \in \mathbb{R} \quad 0 \leq f(x)$

نقول f دالة مصغورة على $\mathbb{R}$ بالعدد 0

سؤال: هل الدالة f مصغورة على $\mathbb{R}$ بالعدد -1؟ نعم

(4) نستنتج أن: $\forall x \in \mathbb{R} \quad 0 \leq f(x) \leq 1$

اذن: f مكبورة ومصغورة على $\mathbb{R}$

ومنه f دالة محدودة على $\mathbb{R}$

تمرين 6:

نعتبر الدالة f المعرفة كالتالي: $f(x) = x^2 - 2x + 5$

بين أن الدالة f مصغورة بالعدد 4

الأجوبة: يكفي أن نبين أن: $\forall x \in \mathbb{R} \quad 4 \leq f(x)$

اذن نحسب الفرق:

$$f(x) - 4 = x^2 - 2x + 5 - 4 = x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2 \geq 0$$

ومنه: $\forall x \in \mathbb{R} \quad 4 \leq f(x)$

وبالتالي f مصغورة على $\mathbb{R}$ بالعدد 4

تمرين 7: نعتبر الدالة f المعرفة

$$f(x) = -2x^2 + 4x + 1$$

بين أن الدالة f مكبورة بالعدد 3

الأجوبة: يكفي أن نبين أن: $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) \leq 3$

اذن نحسب الفرق: $3 - f(x) = 3 - (-2x^2 + 4x + 1) = 3 + 2x^2 - 4x - 1 = 2x^2 - 4x + 2$

$$3 - f(x) = 2x^2 - 4x + 2 = 2(x^2 - 2x + 1) = 2(x - 1)^2 \geq 0$$

ومنه: $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) \leq 3$

وبالتالي f مكبورة على $\mathbb{R}$ بالعدد 3

تمرين 8: لتكن f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي:

$$f(x) = x^2 + 2$$

1. أحسب: $f(0)$

2. أحسب: $f(x) - f(0)$ ؟

3. بين أن $f(0)$ هي قيمة الدنيا للدالة f على $\mathbb{R}$

الأجوبة: (1) $D_f = \mathbb{R}$ و $f(0) = 2$

$$f(x) - f(0) = x^2 + 2 - 2 = x^2$$

نعلم أن: $\forall x \in \mathbb{R} \quad 0 \leq x^2$

اذن: $f(x) - f(0) \geq 0$

يعني $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(0) \leq f(x)$

(3) وجدنا $f(0) \leq f(x)$

اذن: $f(0)$ هي قيمة الدنيا للدالة f على $\mathbb{R}$

$$\text{يعني } \sqrt{2}x - 1 = 0 \text{ أو } \sqrt{2}x + 1 = 0 \text{ يعني } x = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ أو } x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\text{يعني } x = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ أو } x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ ومنه } D_f = \mathbb{R} - \left\{ -\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2} \right\}$$

(أ) لكل x من $\mathbb{R} - \left\{ -\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2} \right\}$ لدينا: $-x$ تنتمي إلى $\mathbb{R} - \left\{ -\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2} \right\}$

$$\text{(ب) } f(-x) = \frac{(-x)^4 - 2}{2(-x)^2 - 1} = \frac{x^4 - 2}{2x^2 - 1} = f(x)$$

ومنه g دالة زوجية

$$(5) \quad f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 4} \quad \text{نحدد أولا مجموعة التعريف}$$

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} / x^2 - 4 \neq 0\}$$

$$x^2 - 4 = 0 \text{ يعني } (x)^2 - 2^2 = 0 \text{ يعني } (x - 2)(x + 2) = 0$$

يعني $x - 2 = 0$ أو $x + 2 = 0$ يعني $x = 2$ أو $x = -2$

ومنه $D_f = \mathbb{R} - \{-2; 2\}$

(أ) لكل x من $\mathbb{R} - \{-2; 2\}$ لدينا: $-x$ تنتمي إلى $\mathbb{R} - \{-2; 2\}$

$$\text{(ب) } f(-x) = \frac{(-x)^3}{(-x)^2 - 4} = \frac{-x^3}{x^2 - 4} = -\frac{x^3}{x^2 - 4} = -f(x)$$

ومنه g دالة فردية

تمرين 4: نعتبر الدوال f و g المعرفة كالتالي:

$$g(x) = \frac{3x}{9x^2 - 1}$$

(1) حدد (D_g) مجموعة تعريف الدالة g .

(2) أدرس زوجية الدالة g و أعط تأويلا مبيانيا للنتيجة

$$\text{الأجوبة: (1) } g(x) = \frac{x^4}{9x^2 - 1}$$

$$D_g = \{x \in \mathbb{R} / 9x^2 - 1 \neq 0\}$$

$$9x^2 - 1 = 0 \text{ يعني } 9x^2 = 1 \text{ أو } x = \frac{1}{3} \text{ أو } x = -\frac{1}{3} \text{ ومنه: } D_g = \mathbb{R} - \left\{ -\frac{1}{3}; \frac{1}{3} \right\}$$

$$(2) \quad \text{دراسة زوجية الدالة } g:$$

(أ) لكل x من $\mathbb{R} - \left\{ -\frac{1}{3}; \frac{1}{3} \right\}$ لدينا: $-x$ تنتمي إلى $\mathbb{R} - \left\{ -\frac{1}{3}; \frac{1}{3} \right\}$

$$\text{إلى } D_g = \mathbb{R} - \left\{ -\frac{1}{3}; \frac{1}{3} \right\}$$

$$\text{(ب) } g(-x) = \frac{3(-x)}{9(-x)^2 - 1} = -\frac{3x}{9x^2 - 1} = -g(x) \text{ ومنه } g \text{ دالة فردية}$$

g دالة فردية

التأويل المبياني: النقطة 0 مركز تماثل لمنحنى الدالة g .

تمرين 5: نعتبر الدالة f المعرفة كالتالي: $f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$

1. حدد D_f حيز تعريف الدالة f

2. بين أن: $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) \leq 1$

3. بين أن: $\forall x \in \mathbb{R} \quad 0 \leq f(x)$

4. ماذا تستنتج؟ ماذا نقول عن الدالة f ؟

تمرين 9:

تكن f دالة معرفة بـ: $f(x) = -x^2 + 2x + 1$.

(1) أحسب $f(1)$ و $f(x) - f(1)$ مهما تكن x من $\mathbb{R}$.

(2) بين أن: $f(1)$ هي قيمة قصوى للدالة f على $\mathbb{R}$

الأجوبة: (1) $D_f = \mathbb{R}$ و $f(1) = 2$

$$f(1) - f(x) = 2 - (-x^2 + 2x + 1) = 2 + x^2 - 2x - 1$$

$$f(1) - f(x) = x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2 \geq 0$$

اذن: $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(1) \geq f(x)$

(2) وجدنا $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(1) \geq f(x)$

اذن: $f(1)$ هي قيمة قصوى للدالة f على $\mathbb{R}$

تمرين 10:

لتكن f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي: $f(x) = x^2 + 4$

(1) حدد D_f و أحسب: $f(0)$

(2) بين أن $f(0)$ هي قيمة دنيا للدالة f على $\mathbb{R}$

الأجوبة: (1) $D_f = \mathbb{R}$ لأنها دالة حدودية و $f(0) = 0^2 + 4 = 4$

$$f(x) - f(0) = x^2 + 4 - 4 = x^2$$

نعلم أن: $\forall x \in \mathbb{R} \quad 0 \leq x^2$

اذن: $f(x) - f(0) \geq 0$

يعني $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(0) \leq f(x)$

اذن: $f(0)$ هي قيمة الدنيا للدالة f على $\mathbb{R}$

تمرين 11:

لتكن f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي: $f(x) = -x^2 + 1$

(1) حدد D_f و أحسب: $f(0)$

(2) بين أن $f(0)$ هي قيمة قصوى للدالة f على $\mathbb{R}$

الأجوبة: (1) $D_f = \mathbb{R}$ لأنها دالة حدودية و $f(0) = -0^2 + 1 = 1$

$$f(0) - f(x) = 1 - (-x^2 + 1) = 1 + x^2 - 1 = x^2 \geq 0$$

اذن: $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(0) \geq f(x)$

اذن: $f(0)$ هي قيمة قصوى للدالة f على $\mathbb{R}$

تمرين 12:

لتكن الدالتين العدديتين f و g المعرفتين على $\mathbb{R}$

بما يلي: $f(x) = 2x - 1$ و $g(x) = x^2$

(1) املأ الجدولين التاليين ومثل الدالتين f و g في نفس المعلم

X	-3	-2	-1	0	1	2	3
g(x)							

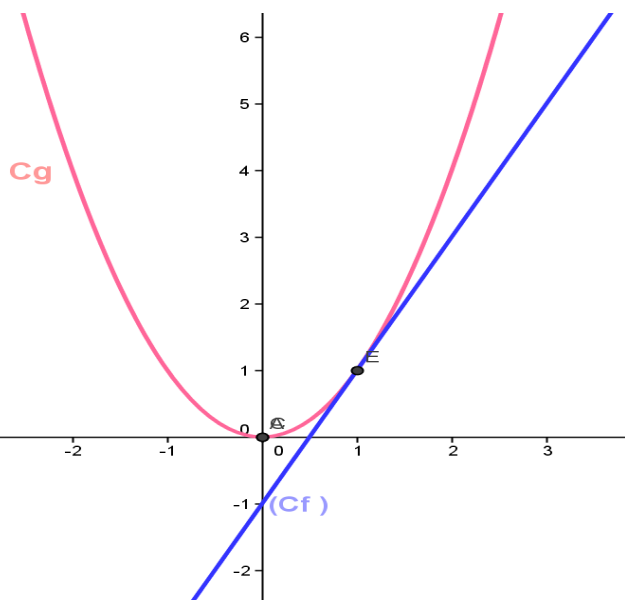
X	0	1
f(x)		

(2) أدرس إشارة الفرق: $g(x) - f(x)$ وماذا تستنتج مبيانيًا؟

الأجوبة: (1) $D_g = \mathbb{R}$ و $D_f = \mathbb{R}$ لأنهم دوال حدودية

X	-3	-2	-1	0	1	2	3
g(x)	9	4	1	0	1	4	9

X	0	1
f(x)	-1	1



$$g(x) \geq f(x) \text{ ومنه } g(x) - f(x) = x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2 \geq 0$$

نقول أننا قمنا بمقارنة للدالتين f و g وجدنا أن: $g \geq f$

مبيانيا نلاحظ أن منحنى الدالة g يوجد فوق منحنى الدالة f

تمرين 13:

لتكن الدالة f المعرفة كالتالي: $f(x) = 4x - 3$

(1) حدد D_f

(2) أدرس رتبة f

(3) حدد جدول تغيرات الدالة f

الأجوبة: (1) $D_f = \mathbb{R}$ لأنها دالة حدودية

(2) ليكن: $x_1 \in \mathbb{R}$ و $x_2 \in \mathbb{R}$ بحيث $x_1 \neq x_2$

$$\text{نحسب معدل تغير الدالة } f: \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{(4x_2 - 3) - (4x_1 - 3)}{x_2 - x_1} = \frac{4x_2 - 4x_1}{x_2 - x_1} = \frac{4(x_2 - x_1)}{x_2 - x_1}$$

ومنه $T = 4 \geq 0$ وبالتالي الدالة f تزايدية على $\mathbb{R}$

(3) جدول التغيرات

x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x)$		

تمرين 14:

لتكن الدالة g المعرفة كالتالي: $g(x) = -3x + 2$

(1) حدد D_g

(2) أدرس رتبة g

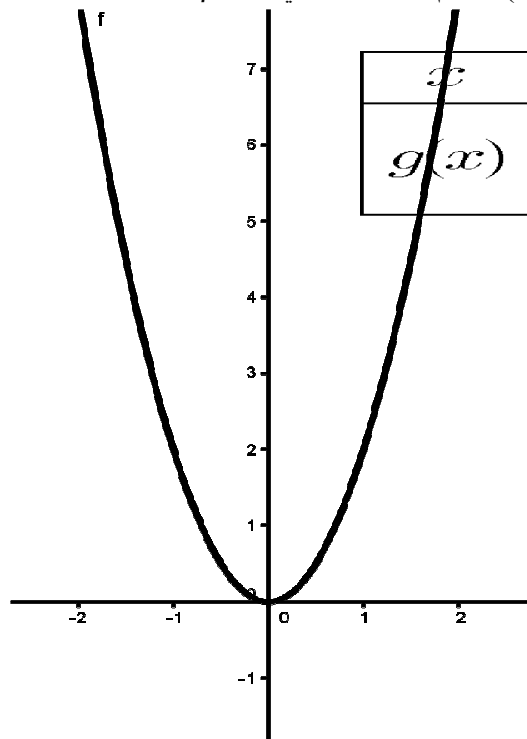
(3) حدد جدول تغيرات الدالة g

الأجوبة: (1) $D_g = \mathbb{R}$ لأنها دالة حدودية

(2) ليكن: $x_1 \in \mathbb{R}$ و $x_2 \in \mathbb{R}$ بحيث $x_1 \neq x_2$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$		0	

(6) f تقبل قيمة دنيا عند $x_0 = 0$
(7) رسم التمثيل المبياني للدالة f



« c'est en forgeant que l'on devient forgeron » dit un proverbe.
c'est en s'entraînant
régulièrement aux calculs et
exercices que l'on devient un
mathématicien



نحسب معدل تغير الدالة g : $\frac{g(x_2) - g(x_1)}{x_2 - x_1}$

$$\frac{g(x_2) - g(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{(-3x_2 + 2) - (-3x_1 + 2)}{x_2 - x_1} = \frac{-3x_2 + 3x_1}{x_2 - x_1} = \frac{-3(x_2 - x_1)}{x_2 - x_1}$$

ومنه : $-3 \leq 0$ وبالتالي الدالة g تناقصية على $\mathbb{R}$

(3) جدول التغيرات

x	0	1	2	3
$f(x)$	0	2	8	18

x	$-\infty$	$+\infty$
$g(x)$		

تمرين 15:

لتكن f دالة معرفة ب: $f(x) = 2x^2$.

- حدد D_f مجموعة تعريف الدالة f .
- أدرس زوجية الدالة f .
- أحسب معدل تغير الدالة f .
- أدرس رتابة الدالة f على كل من المجالين $[0; +\infty[$ و $]-\infty; 0]$.

(5) وحدد جدول تغيرات الدالة f .

(6) حدد مطايف الدالة f .

(7) أرسم التمثيل المبياني للدالة f .

الأجوبة: (1) $D_f = \mathbb{R}$ لأنها دالة حدودية

(2) أ) لكل x من $\mathbb{R}$ لدينا: $-x$ تنتمي إلى $\mathbb{R}$.

$$f(-x) = 2(-x)^2 = 2x^2 = f(x) \text{ (ب)}$$

ومنه f دالة زوجية

(3) حساب معدل تغير الدالة f

$$T = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{2x_2^2 - 2x_1^2}{x_2 - x_1} = \frac{2(x_2^2 - x_1^2)}{x_2 - x_1}$$

$$T = \frac{2(x_2 - x_1)(x_2 + x_1)}{x_2 - x_1} = 2(x_2 + x_1)$$

(4) أ) دراسة رتابة الدالة f على المجال $[0; +\infty[$:

ليكن : $x_1 \in [0; +\infty[$ و $x_2 \in [0; +\infty[$

$$T = 2(x_2 + x_1) \geq 0$$

ومنه الدالة f تزايدية على $[0; +\infty[$

(ب) دراسة رتابة الدالة f على المجال $]-\infty; 0]$:

ليكن : $x_1 \in]-\infty; 0]$ و $x_2 \in]-\infty; 0]$

$$T = 2(x_2 + x_1) \leq 0$$

ومنه الدالة f تناقصية على $]-\infty; 0]$

(5) حدد جدول تغيرات الدالة f .