

ملخص درس عموميات حول الدوال

I. تذكير

1. مجموعة تعريف دالة عددية:

تعريف: لتكن f دالة عددية لمتغير حقيقي x .

مجموعة تعريف الدالة f هي المجموعة المكونة من جميع الأعداد الحقيقية x بحيث $f(x)$ موجود أي $f(x)$ قابلة للحساب. و يرمز لها

غالبا بالرمز D_f بمعنى: $x \in D_f$ تكافئ $f(x) \in \mathbb{R}$.

مثال: حدد مجموعة تعريف الدالة f في الحالات التالية:

$$f(x) = \frac{x^2 + x - 1}{4x - 12} \quad (2) \quad f(x) = x^3 - 3x^2 - 5x + 10 \quad (1)$$

$$f(x) = \sqrt{-3x + 6} \quad (4) \quad f(x) = \frac{x - 5}{2x^2 - 5x - 3} \quad (3)$$

الجواب: (1) $f(x) = x^3 - 3x^2 - 5x + 10$

بمعنى $D_f = \mathbb{R}$ لأنها دالة حدودية

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} / 4x - 12 \neq 0\} \text{ يعني } f(x) = \frac{x^2 + x - 1}{4x - 12} \quad (2)$$

$$D_f = \mathbb{R} - \{3\} \text{ ومنه } 4x - 12 = 0 \text{ يعني } 4x = 12 \text{ يعني } x = 3$$

$$f(x) = \frac{x - 5}{2x^2 - 5x - 3} \quad (3) \text{ يعني}$$

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} / 2x^2 - 5x - 3 \neq 0\}$$

$$2x^2 - 5x - 3 = 0 \text{ نحل المعادلة باستعمال المميز}$$

$$a = 2 \text{ و } b = -5 \text{ و } c = -3$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4 \times 2 \times (-3) = 25 + 24 = 49 = (7)^2 > 0$$

بما أن $\Delta > 0$ فإن هذه المعادلة تقبل حلين هما:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ و } x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x_1 = \frac{-(-5) + \sqrt{49}}{2 \times 2} = \frac{5 + 7}{4} = \frac{12}{4} = 3 \text{ و } x_2 = \frac{-(-5) - \sqrt{49}}{2 \times 2} = \frac{5 - 7}{4} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}$$

$$\text{ومنه: } D_f = \mathbb{R} - \left\{-\frac{1}{2}; 3\right\}$$

$$f(x) = \sqrt{-3x + 6} \quad (4) \text{ يعني } D_f = \{x \in \mathbb{R} / -3x + 6 \geq 0\}$$

$$-3x + 6 \geq 0 \text{ يعني } -3x \geq -6 \text{ يعني } x \leq 2 \text{ ومنه}$$

$$D_f =]-\infty; 2]$$

2. زوجية دالة عددية:

مثال: أدرس زوجية الدالة f في الحالات التالية: (1) $f(x) = 3x^2$

$$f(x) = \frac{4}{x} \quad (2)$$

$$f(x) = 3x^2 \quad (1) \text{ الأوجبة:}$$

$D_f = \mathbb{R}$ لأنها دالة حدودية

(أ) لكل x من $D_f = \mathbb{R}$ لدينا: $-x$ تنتمي إلى $D_f = \mathbb{R}$

$$(ب) f(-x) = 3(-x)^2 = 3x^2 = f(x) \text{ ومنه } f \text{ دالة زوجية}$$

$$f(x) = \frac{4}{x} \quad (2) \quad D_f = \mathbb{R}^*$$

(أ) لكل x من $D_f = \mathbb{R}^*$ لدينا: $-x$ تنتمي إلى $D_f = \mathbb{R}^*$

$$(ب) f(-x) = \frac{4}{-x} = -\frac{4}{x} = -f(x) \text{ ومنه } f \text{ دالة فردية}$$

التأويلات المبيانية: لتكن f دالة عددية لمتغير x حقيقي و C_f منحناها في معلم متعامد ممنظم $(o; \vec{i}; \vec{j})$.

❖ تكون f دالة زوجية إذا و فقط إذا كان محور الأرتيب محور تماثل المنحنى C_f .

❖ تكون f دالة فردية إذا و فقط إذا كانت النقطة 0 مركز تماثل المنحنى C_f .

II. الدالة المكبورة والدالة المصغورة والدالة المحدودة

تعريف: لتكن f دالة عددية معرفة على مجال I من $\mathbb{R}$.

• نقول إن f دالة مكبورة على مجال I إذا وجد عدد حقيقي M بحيث: $\forall x \in I \quad f(x) \leq M$

• نقول إن f دالة مصغورة على مجال I إذا وجد عدد حقيقي m بحيث: $\forall x \in I \quad f(x) \geq m$

• نقول إن f دالة محدودة على مجال I إذا كانت مكبورة و مصغورة على المجال I .

مثال 1: نعتبر الدالة f المعرفة كالتالي: $f(x) = x^2 - 2x + 5$

بين أن الدالة f مصغورة بالعدد 4

الجواب: يكفي أن نبين أن: $\forall x \in \mathbb{R} \quad 4 \leq f(x)$

$$\text{اذن نحسب الفرق: } f(x) - 4 = x^2 - 2x + 5 - 4 = x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2 \geq 0$$

$$\text{ومنه: } \forall x \in \mathbb{R} \quad 4 \leq f(x)$$

وبالتالي f مصغورة على $\mathbb{R}$ بالعدد 4

مثال 2: نعتبر الدالة f المعرفة كالتالي: $f(x) = -2x^2 + 4x + 1$

بين أن الدالة f مكبورة بالعدد 3

الجواب: يكفي أن نبين أن: $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) \leq 3$

$$\text{اذن نحسب الفرق: } 3 - f(x) = 3 - (-2x^2 + 4x + 1) = 3 + 2x^2 - 4x - 1 = 2x^2 - 4x + 2 = 2(x - 1)^2 \geq 0$$

$$\text{ومنه: } \forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) \leq 3 \text{ وبالتالي } f \text{ مكبورة على } \mathbb{R} \text{ بالعدد 3}$$

III. مطارياف دالة عددية

تعريف: لتكن f دالة عددية معرفة على مجال I و a عنصرا من المجال I

■ نقول إن $f(a)$ هي القيمة القصوى للدالة f على المجال I , إذا

$$\forall x \in I \quad f(x) \leq f(a) \text{ كان:}$$

■ نقول إن $f(a)$ هي القيمة الدنيا للدالة f على المجال I , إذا كان

$$\forall x \in I \quad f(x) \geq f(a) :$$

IV. مقارنة دالتين

تعريف 1: لتكن f و g دالتين عدديتين و D_f و D_g على التوالي مجموعة تعريفهما.

نقول إن f تساوي g ونكتب $f = g$ إذا و فقط إذا كان:

$$(\forall x \in D_f) \quad f(x) = g(x) \text{ و } D_g = D_f$$

تعريف 2: لتكن f و g دالتين عديتين معرفتين على مجال I .
نقول إن f أصغر من أو يساوي g على مجال I ونكتب $f \leq g$ إذا وفقط إذا كان :

$$(\forall x \in I) f(x) \leq g(x)$$

التأويل الهندسي: $f \leq g$ على مجال I يعني هندسيا أن منحنى الدالة f يوجد تحت منحنى الدالة g على المجال I .

ملحوظة:

• $f < g$ على المجال I

إذا وفقط إذا كان : $(\forall x \in I) f(x) < g(x)$

• $f \geq 0$ على المجال I

إذا وفقط إذا كان : $(\forall x \in I) f(x) \geq 0$

V. رتبة دالة عددية

• يمكن دراسة رتبة دالة f على مجال I بدراسة إشارة معدل التغير : $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$

مع x_1 و x_2 عنصرين مختلفين من I

• نقول إن f دالة رتيبة على I إذا كانت f تزايدية قطعاً أو تناقصية قطعاً على مجال I .

مثال 1: لتكن الدالة f المعرفة كالتالي : $f(x) = 4x - 3$

(1) حدد D_f (2) أدرس رتبة f (3) حدد جدول تغيرات الدالة f

أجوبة: (1) $D_f = \mathbb{R}$ لأنها دالة حدودية

(2) ليكن : $x_1 \in \mathbb{R}$ و $x_2 \in \mathbb{R}$ بحيث $x_1 \neq x_2$

نحسب معدل تغير الدالة f : $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{(4x_2 - 3) - (4x_1 - 3)}{x_2 - x_1} = \frac{4x_2 - 4x_1}{x_2 - x_1} = \frac{4(x_2 - x_1)}{x_2 - x_1}$$

ومنه : $T = 4 \geq 0$ وبالتالي الدالة f تزايدية على $\mathbb{R}$

(3) جدول التغيرات

x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x)$	↗	

مثال 2: لتكن الدالة g المعرفة كالتالي : $g(x) = -3x + 2$

(1) حدد D_g (2) أدرس رتبة g (3) حدد جدول تغيرات الدالة g

أجوبة: (1) $D_g = \mathbb{R}$ لأنها دالة حدودية

(2) ليكن : $x_1 \in \mathbb{R}$ و $x_2 \in \mathbb{R}$ بحيث $x_1 \neq x_2$

نحسب معدل تغير الدالة g : $\frac{g(x_2) - g(x_1)}{x_2 - x_1}$

$$\frac{g(x_2) - g(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{(-3x_2 + 2) - (-3x_1 + 2)}{x_2 - x_1} = \frac{-3x_2 + 3x_1}{x_2 - x_1} = \frac{-3(x_2 - x_1)}{x_2 - x_1}$$

ومنه : $T = -3 \leq 0$ وبالتالي الدالة g تناقصية على $\mathbb{R}$

(3) جدول التغيرات

x	$-\infty$	$+\infty$
$g(x)$	↘	

مثال 3: لتكن f دالة معرفة بـ : $f(x) = 2x^2$

(1) حدد D_f (2) أدرس زوجية الدالة f

(3) أحسب معدل تغير الدالة f

(4) أدرس رتبة الدالة f على كل من المجالين $[0; +\infty[$ و $] -\infty; 0]$

(5) وحدد جدول تغيرات الدالة f

(6) حدد مطايف الدالة f

(7) أرسم التمثيل المبياني للدالة f

أجوبة: (1) $D_f = \mathbb{R}$ لأنها دالة حدودية

(2) أ) لكل x من $\mathbb{R}$ لدينا : $-x$ تنتمي إلى $\mathbb{R}$.

ب) $f(-x) = 2(-x)^2 = 2x^2 = f(x)$

ومنه f دالة زوجية

(3) حساب معدل تغير الدالة f

$$T = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{2x_2^2 - 2x_1^2}{x_2 - x_1} = \frac{2(x_2^2 - x_1^2)}{x_2 - x_1}$$

$$T = \frac{2(x_2 - x_1)(x_2 + x_1)}{x_2 - x_1} = 2(x_2 + x_1)$$

(4) أ) دراسة رتبة الدالة f على المجال $[0; +\infty[$:

ليكن : $x_1 \in [0; +\infty[$ و $x_2 \in [0; +\infty[$

اذن $T = 2(x_2 + x_1) \geq 0$

ومنه الدالة f تزايدية على $[0; +\infty[$

ب) دراسة رتبة الدالة f على المجال $] -\infty; 0]$:

ليكن : $x_1 \in] -\infty; 0]$ و $x_2 \in] -\infty; 0]$

اذن $T = 2(x_2 + x_1) \leq 0$

ومنه الدالة f تناقصية على $] -\infty; 0]$

(5) حدد جدول تغيرات الدالة f .

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	↘ 0 ↗		

(6) f تقبل قيمة دنيا عند $x_0 = 0$

(7) رسم التمثيل المبياني للدالة f

