

الأستاذ:
نجيب
عثماني

الدرس الثالث :

مجموعات حول الدوال

أكاديمية
الجهة
الشرقية

مستوى: السنة الأولى من سلك البكالوريا

- **شعبة التعليم الأصيل: مسلك العلوم الشرعية و مسلك اللغة العربية**
 - **شعبة الآداب و العلوم الإنسانية: مسلك الآداب و مسلك العلوم الإنسانية**
- محتوى الدرس و الأهداف القدرات المنتظرة من الدرس و التعليمات الرسمية**

محتوى البرنامج	القدرات المنتظرة	توجيهات تربوية
- الدالة الزوجية؛ الدالة الفردية؛ التأويل المبياني؛ - الدالة المكبورة، الدالة المصغورة؛ الدالة المحدودة؛ - مقارنة الدالتين؛ التأويل المبياني؛ - رتابة دالة عددية؛ معدل التغير؛ - مطايف دالة	- مقارنة تعبيرين باستعمال مختلف التقنيات؛ - استنتاج تغيرات دالة أو القيم القصوى والدنوية لدالة انطلاقا من تمثيلها المبياني أو من جدول تغيراتها؛ - المزوجة بين قراءة وتأويل بعض التمثيلات المبيانية وبين بعض خاصيات الدوال.	- ينبغي تعويد التلاميذ على استنتاج تغيرات دالة عددية انطلاقا من تمثيلها المبياني؛ كما ينبغي الاهتمام بإنشاء المنحنيات؛ - يمكن في حدود الإمكان استعمال الآلات الحاسبة والبرامج المعلوماتية المدمجة في الحاسوب التي تمكن من دراسة الدوال.

I. تذكير

تمرين 1:

حدد مجموعة تعريف الدوال التالية:

$$g(x) = \frac{x^3}{2x-4} \quad (2) \quad f(x) = 3x^2 - x + 1 \quad (1)$$

$$m(x) = \sqrt{2x-4} \quad (4) \quad h(x) = \frac{5x+10}{x^2-9} \quad (3)$$

الجواب: (1) $f(x) = 3x^2 - x + 1$

يعني $D_f = \mathbb{R}$ لأنها دالة حدودية

$$D_g = \{x \in \mathbb{R} / 2x-4 \neq 0\} \text{ يعني } g(x) = \frac{x^3}{2x-4} \quad (2)$$

$$D_g = \mathbb{R} - \{2\} \text{ ومنه } x=2 \text{ يعني } 2x=4 \text{ يعني } 2x-4=0$$

$$D_g = \{x \in \mathbb{R} / 2x-4 \neq 0\} \text{ يعني } g(x) = \frac{x^3}{2x-4} \quad (3)$$

$$x=2 \text{ يعني } 2x=4 \text{ يعني } 2x-4=0$$

$$D_g = \mathbb{R} - \{2\} \text{ ومنه}$$

تمرين 2: حدد مجموعة تعريف الدالة f في الحالات التالية:

$$f(x) = \frac{x^2+x-1}{4x-12} \quad (2) \quad f(x) = x^3 - 3x^2 - 5x + 10 \quad (1)$$

$$f(x) = \frac{7x-1}{x^3-2x} \quad (4) \quad f(x) = \frac{x+10}{4x^2-1} \quad (3)$$

$$f(x) = \sqrt{-3x+6} \quad (6) \quad f(x) = \frac{x-5}{2x^2-5x-3} \quad (5)$$

الجواب: (1) $f(x) = x^3 - 3x^2 - 5x + 10$

يعني $D_f = \mathbb{R}$ لأنها دالة حدودية

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} / 4x-12 \neq 0\} \text{ يعني } f(x) = \frac{x^2+x-1}{4x-12} \quad (2)$$

$$D_f = \mathbb{R} - \{3\} \text{ ومنه } x=3 \text{ يعني } 4x=12 \text{ يعني } 4x-12=0$$

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} / 4x^2-1 \neq 0\} \text{ يعني } f(x) = \frac{x+10}{4x^2-1} \quad (3)$$

$$(2x-1)(2x+1)=0 \text{ يعني } (2x)^2 - 1^2 = 0 \text{ يعني } 4x^2 - 1 = 0$$

$$\text{يعني } 2x-1=0 \text{ أو } 2x+1=0 \text{ يعني } x=\frac{1}{2} \text{ أو } x=-\frac{1}{2} \text{ ومنه}$$

$$D_f = \mathbb{R} - \left\{ -\frac{1}{2}; \frac{1}{2} \right\}$$

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} / x^3 - 2x \neq 0\} \text{ يعني } f(x) = \frac{7x-1}{x^3-2x} \quad (4)$$

$$x=0 \text{ أو } x^2-3=0 \text{ يعني } x(x^2-2)=0 \text{ يعني } x^3-2x=0$$

$$\text{يعني } x^2=3 \text{ أو } x=0 \text{ يعني } x=\sqrt{3} \text{ أو } x=-\sqrt{3} \text{ أو } x=0 \text{ ومنه}$$

$$D_f = \mathbb{R} - \{-\sqrt{3}; 0; \sqrt{3}\}$$

$$f(x) = \frac{x-5}{2x^2-5x-3} \quad (5)$$

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} / 2x^2-5x-3 \neq 0\} \text{ يعني}$$

$$\text{نحل المعادلة باستعمال المميز} \quad 2x^2-5x-3=0$$

$$c=-3 \text{ و } b=-5 \text{ و } a=2$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4 \times 2 \times (-3) = 25 + 24 = 49 = (7)^2 > 0$$

بما أن $\Delta > 0$ فان هذه المعادلة تقبل حلين هما:

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ و } x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x_2 = \frac{-(-5) - \sqrt{49}}{2 \times 2} = \frac{5-7}{4} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2} \text{ و } x_1 = \frac{-(-5) + \sqrt{49}}{2 \times 2} = \frac{7+5}{4} = \frac{12}{4} = 3$$

$$\text{ومنه: } D_f = \mathbb{R} - \left\{ -\frac{1}{2}; 3 \right\}$$

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} / -3x+6 \geq 0\} \text{ يعني } f(x) = \sqrt{-3x+6} \quad (6)$$

$$D_m =]-\infty; 2] \text{ ومنه } x \leq 2 \text{ يعني } -3x \geq -6 \text{ يعني } -3x+6 \geq 0$$

تمرين 3: أدرس زوجية الدالة f في الحالات التالية:

$$f(x) = 2x^5 - 3x \quad (3) \quad f(x) = \frac{4}{x} \quad (2) \quad f(x) = 3x^2 \quad (1)$$

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 4} \quad (5) \quad f(x) = \frac{x^4 - 2}{2x^2 - 1} \quad (4)$$

تمرين 4: نعتبر الدوال f و g المعرفة كالتالي:

$$g(x) = \frac{3x}{9x^2 - 1}$$

(1) حدد (D_g) مجموعة تعريف الدالة g .

(2) أدرس زوجية الدالة g و أعط تأويلا مبيانيا للنتيجة

$$D_g = \{x \in \mathbb{R} / 9x^2 - 1 \neq 0\} \quad g(x) = \frac{x^4}{9x^2 - 1} \quad (1) \quad \text{الأجوبة:}$$

$$9x^2 - 1 = 0 \text{ يعني } x = -\frac{1}{3} \text{ أو } x = \frac{1}{3} \text{ ومنه:}$$

$$D_g = \mathbb{R} - \left\{ -\frac{1}{3}, \frac{1}{3} \right\}$$

(2) دراسة زوجية الدالة g :

$$(2) \quad \text{أ) لكل } x \text{ من } D_g = \mathbb{R} - \left\{ -\frac{1}{3}, \frac{1}{3} \right\} \text{ لدينا: } -x \text{ تنتمي}$$

$$\text{إلى } D_g = \mathbb{R} - \left\{ -\frac{1}{3}, \frac{1}{3} \right\}.$$

$$g(-x) = \frac{3(-x)}{9(-x)^2 - 1} = -\frac{3x}{9x^2 - 1} = -g(x) \quad \text{ب) ومنه } g$$

دالة فردية

التأويل المبياني: النقطة 0 مركز تماثل لمنحنى الدالة g .

التأويلات المبيانية

لتكن f دالة عددية لمتغير x حقيقي و C_f منحناها في معلم متعامد

منظم $(o; \vec{i}; \vec{j})$.

❖ تكون f دالة زوجية إذا و فقط إذا كان محور الأرتيب محور

تماثل المنحنى C_f .

❖ تكون f دالة فردية إذا و فقط إذا كانت النقطة 0 مركز تماثل

المنحنى C_f .

II. الدالة المكبورة و الدالة المصغورة و الدالة المحدودة

$$\text{نشاط: نعتبر الدالة } f \text{ المعرفة كالتالي: } f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$$

1. حدد D_f حيز تعريف الدالة f

$$2. \text{ بين أن: } \forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) \leq 1$$

$$3. \text{ بين أن: } \forall x \in \mathbb{R} \quad 0 \leq f(x)$$

4. ماذا تستنتج؟ ماذا نقول عن الدالة f ؟

$$\text{الأجوبة: (1) } D_f = \{x \in \mathbb{R} / x^2 + 1 \neq 0\}$$

$$x^2 = -1 \Leftrightarrow x^2 + 1 = 0 \text{ وهذه المعادلة ليس لها حل في } \mathbb{R}$$

$$D_f = \mathbb{R}$$

$$(2) \text{ نعلم أن: } \forall x \in \mathbb{R} \quad x^2 \geq 0$$

$$\text{اذن: } x^2 + 1 \geq 0 + 1 = 1 \text{ يعني } x^2 + 1 \geq 1$$

$$\text{يعني } \forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = \frac{1}{x^2 + 1} \leq 1$$

نقول f دالة مكبورة على $\mathbb{R}$ بالعدد 1

سؤال: هل الدالة f مكبورة على $\mathbb{R}$ بالعدد 2؟ نعم

$$(3) \text{ نعلم أن: } \forall x \in \mathbb{R} \quad x^2 \geq 0$$

$$\text{اذن: } x^2 + 1 \geq 0 + 1 = 1 \text{ يعني } x^2 + 1 \geq 1$$

$$\text{يعني } \forall x \in \mathbb{R} \quad 0 \leq f(x)$$

نقول f دالة مصغورة على $\mathbb{R}$ بالعدد 0

سؤال: هل الدالة f مصغورة على $\mathbb{R}$ بالعدد -1؟ نعم

$$(4) \text{ نستنتج أن: } \forall x \in \mathbb{R} \quad 0 \leq f(x) \leq 1$$

اذن: f مكبورة و مصغورة على $\mathbb{R}$ نقول f دالة محدودة على $\mathbb{R}$

1. تعريف

لتكن f دالة عددية معرفة على مجال I من $\mathbb{R}$.

• نقول إن f دالة مكبورة على مجال I إذا وجد عدد حقيقي M

$$\text{بحيث: } \forall x \in I \quad f(x) \leq M$$

• نقول إن f دالة مصغورة على مجال I إذا وجد عدد حقيقي

$$m \text{ بحيث: } \forall x \in I \quad f(x) \geq m$$

• نقول إن f دالة محدودة على مجال I إذا كانت مكبورة و

مصغورة على المجال I .

تمرين 5: نعتبر الدالة f المعرفة كالتالي: $f(x) = x^2 - 2x + 5$

بين أن الدالة f مصغورة بالعدد 4

الجواب: يكفي أن نبين أن: $\forall x \in \mathbb{R} \quad 4 \leq f(x)$

$$\text{اذن نحسب الفرق: } f(x) - 4 = x^2 - 2x + 5 - 4 = x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2 \geq 0$$

$$\text{ومنه: } \forall x \in \mathbb{R} \quad 4 \leq f(x)$$

وبالتالي f مصغورة على $\mathbb{R}$ بالعدد 4

تمرين 6: نعتبر الدالة f المعرفة كالتالي:

$$f(x) = -2x^2 + 4x + 1$$

بين أن الدالة f مكبورة بالعدد 3

الجواب: يكفي أن نبين أن: $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) \leq 3$

$$\text{اذن نحسب الفرق: } 3 - f(x) = 3 - (-2x^2 + 4x + 1) = 3 + 2x^2 - 4x - 1 = 2x^2 - 4x + 2$$

$$= 2(x^2 - 2x + 1) = 2(x - 1)^2 \geq 0$$

$$\text{ومنه: } \forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) \leq 3$$

وبالتالي f مكبورة على $\mathbb{R}$ بالعدد 3

III. مطاريق دالة عددية

نشاط 1: لتكن f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي: $f(x) = x^2 + 2$

1. أحسب: $f(0)$

2. أحسب: $f(x) - f(0)$ وماذا تستنتج؟

$$\text{الأجوبة: (1) } D_f = \mathbb{R} \text{ و } f(0) = 2$$

$$(2) \quad f(x) - f(0) = x^2 + 2 - 2 = x^2$$

$$\text{نعلم أن: } \forall x \in \mathbb{R} \quad 0 \leq x^2$$

$$\text{اذن: } f(x) - f(0) \geq 0$$

$$\text{يعني } \forall x \in \mathbb{R} \quad f(0) \leq f(x)$$

نقول $f(0)$ هي قيمة دنيا للدالة f على $\mathbb{R}$

نشاط 2: تكن f دالة معرفة ب: $f(x) = -x^2 + 2x + 1$

(1) أحسب $f(1)$ و $f(x) - f(1)$ مهما تكن x من $\mathbb{R}$.

(2) ماذا تستنتج؟

1. تعريف :

لتكن f و g دالتين عدديتين و D_f و D_g على التوالي مجموعة تعريفهما.

نقول إن f تساوي g ونكتب $f = g$ إذا وفقط إذا كان :

$$(\forall x \in D_f) \quad f(x) = g(x) \quad \text{و} \quad D_g = D_f$$

2. **تعريف :** لتكن f و g دالتين عدديتين معرفتين على مجال I

. نقول إن f أصغر من أو يساوي g على مجال I ونكتب

$$f \leq g \quad \text{إذا وفقط إذا كان :}$$

$$(\forall x \in I) \quad f(x) \leq g(x)$$

3. **التأويل الهندسي :** $f \leq g$ على مجال I يعني هندسياً أن

منحنى الدالة f يوجد تحت منحنى الدالة g على المجال I .

ملحوظة :

• $f < g$ على المجال I

$$(\forall x \in I) \quad f(x) < g(x) \quad \text{إذا وفقط إذا كان :}$$

• $f \geq 0$ على المجال I

$$(\forall x \in I) \quad f(x) \geq 0 \quad \text{إذا وفقط إذا كان :}$$

V. رتبة دالة عددية

• يمكن دراسة رتبة دالة f على مجال I بدراسة إشارة معدل

$$\text{التغير : } \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

مع x_1 و x_2 عنصرين مختلفين من I

• نقول إن f دالة رتيبة على I إذا كانت f تزايدية قطعاً أو

تناقصية قطعاً على مجال I .

نشاط 1: لتكن الدالة f المعرفة كالتالي : $f(x) = 4x - 3$

(1) حدد D_f

(2) أدرس رتبة f

(3) حدد جدول تغيرات الدالة f

أجوبة :

(1) $D_f = \mathbb{R}$ لأنها دالة حدودية

(2) ليكن : $x_1 \in \mathbb{R}$ و $x_2 \in \mathbb{R}$ بحيث $x_1 \neq x_2$

$$\text{نحسب معدل تغير الدالة } f : \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{(4x_2 - 3) - (4x_1 - 3)}{x_2 - x_1} = \frac{4x_2 - 4x_1}{x_2 - x_1} = \frac{4(x_2 - x_1)}{x_2 - x_1}$$

ومنه : $T = 4 \geq 0$ وبالتالي الدالة f تزايدية على $\mathbb{R}$

(3) جدول التغيرات

x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x)$		$\nearrow$

نشاط 2: لتكن الدالة g المعرفة كالتالي : $g(x) = -3x + 2$

(1) حدد D_g

(2) أدرس رتبة g

(3) حدد جدول تغيرات الدالة g

الأجوبة: (1) $D_f = \mathbb{R}$ و $f(1) = 2$

$$f(1) - f(x) = 2 - (-x^2 + 2x + 1) = 2 + x^2 - 2x - 1$$

$$f(1) - f(x) = x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2 \geq 0$$

$$\text{اذن : } \forall x \in \mathbb{R} \quad f(1) \geq f(x)$$

نقول $f(1)$ هي قيمة قصوى للدالة f على $\mathbb{R}$

تعريف : لتكن f دالة عددية معرفة على مجال I و a عنصراً من

المجال I

■ نقول إن $f(a)$ هي القيمة القصوى للدالة f على المجال I , إذا

$$\text{كان : } \forall x \in I \quad f(x) \leq f(a)$$

■ نقول إن $f(a)$ هي القيمة الدنيا للدالة f على المجال I , إذا كان :

$$\forall x \in I \quad f(x) \geq f(a)$$

تمرين 7: لتكن f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي:

$$f(x) = x^2 + 4$$

(1) حدد D_f

(2) أحسب : $f(0)$

(3) بين أن $f(0)$ هي قيمة دنيا للدالة f على $\mathbb{R}$

تمرين 8: لتكن f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي:

$$f(x) = -x^2 + 1$$

(1) حدد D_f

(2) أحسب : $f(0)$

(3) بين أن $f(0)$ هي قيمة قصوى للدالة f على $\mathbb{R}$

IV. مقارنة دالتين

نشاط 1: لتكن الدالتين العدديتين f و g المعرفتين على $\mathbb{R}$

$$\text{بما يلي : } f(x) = 2x - 1 \quad \text{و} \quad g(x) = x^2$$

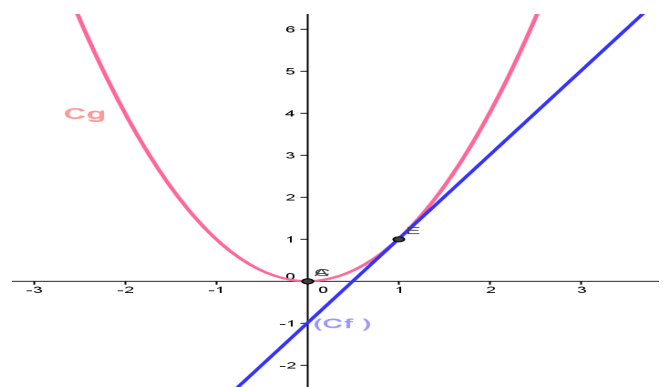
1. املأ الجدولين التاليين ومثل الدالتين f و g في نفس المعلم

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$g(x)$	9	4	1	0	1	4	9

x	0	1
$f(x)$	-1	1

2. أدرس إشارة الفرق : $g(x) - f(x)$ وماذا تستنتج مبيانياً؟

الأجوبة: (1) $D_g = \mathbb{R}$ و $D_f = \mathbb{R}$ لأنهم دوال حدودية



$$(2) \quad g(x) \geq f(x) \quad \text{ومنه} \quad g(x) - f(x) = x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2 \geq 0$$

نقول أننا قمنا بمقارنة الدالتين f و g وجدنا أن : $g \geq f$

مبيانياً نلاحظ أن منحنى الدالة g يوجد فوق منحنى الدالة f

أجوبة :

(1) $D_g = \mathbb{R}$ لأنها دالة حدودية

(2) ليكن : $x_1 \in \mathbb{R}$ و $x_2 \in \mathbb{R}$ بحيث $x_1 \neq x_2$

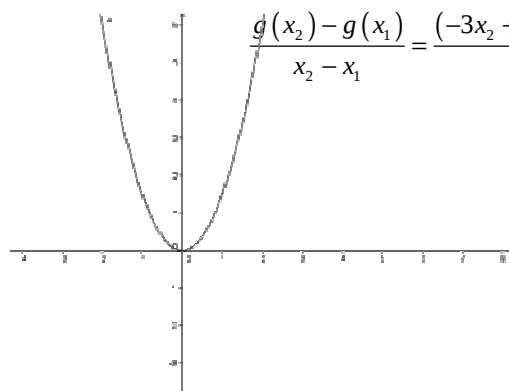
نحسب معدل تغير الدالة

$$g(x_2) - g(x_1) : g$$

x	0	1	2	3
$f(x)$	0	2	8	18

(6) f تقبل قيمة دنيا عند $x_0 = 0$

(7) رسم التمثيل المبياني للدالة f



$$\frac{g(x_2) - g(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{(-3x_2 + 2) - (-3x_1 + 2)}{x_2 - x_1} = \frac{-3x_2 + 3x_1}{x_2 - x_1} = \frac{-3(x_2 - x_1)}{x_2 - x_1}$$

ومنه : $T = -3 \leq 0$ وبالتالي الدالة g تناقصية على $\mathbb{R}$

(3) جدول التغيرات

x	$-\infty$	$+\infty$
$g(x)$		

تمرين 9: لتكن الدالة f المعرفة كالتالي : $f(x) = 12x - 7$

(1) حدد D_f

(2) أدرس رتبة f

(3) حدد جدول تغيرات الدالة f

تمرين 10: لتكن f دالة معرفة بـ : $f(x) = 2x^2$

(1) حدد D_f مجموعة تعريف الدالة f

(2) أدرس زوجية الدالة f

(3) أحسب معدل تغير الدالة f

(4) أدرس رتبة الدالة f على كل من المجالين $[0; +\infty[$ و $] -\infty; 0]$

(5) وحدد جدول تغيرات الدالة f

(6) حدد مطا ريف الدالة f

(7) أرسم التمثيل المبياني للدالة f

(1) **أجوبة :** $D_f = \mathbb{R}$ لأنها دالة حدودية

(2) أ) لكل x من $\mathbb{R}$ لدينا : $-x$ تنتمي إلى $\mathbb{R}$

$$f(-x) = 2(-x)^2 = 2x^2 = f(x)$$

ومنه f دالة زوجية

(3) حساب معدل تغير الدالة f

$$T = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{2x_2^2 - 2x_1^2}{x_2 - x_1} = \frac{2(x_2^2 - x_1^2)}{x_2 - x_1}$$

$$T = \frac{2(x_2 - x_1)(x_2 + x_1)}{x_2 - x_1} = 2(x_2 + x_1)$$

(4) أ) دراسة رتبة الدالة f على المجال $[0; +\infty[$:

ليكن : $x_1 \in [0; +\infty[$ و $x_2 \in [0; +\infty[$

$$T = 2(x_2 + x_1) \geq 0$$

ومنه الدالة f تزايدية على $[0; +\infty[$

ب) دراسة رتبة الدالة f على المجال $] -\infty; 0]$:

ليكن : $x_1 \in] -\infty; 0]$ و $x_2 \in] -\infty; 0]$

$$T = 2(x_2 + x_1) \leq 0$$

ومنه الدالة f تناقصية على $] -\infty; 0]$